

Universidade Federal do Paraná
Programa de Pós-graduação em Física
Dissertação de Mestrado

Raíla André

Análise de campo escalar não-minimamente acoplado
através do formalismo de Palatini e simetria de
Noether

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: *Prof. Dr. Gilberto M. Kremer*

Curitiba - PR

2013

André, Raíla

Análise de campo escalar não-minimamente acoplado através do formalismo de Palatini e simetria de Noether / Raíla André. – Curitiba, 2013.

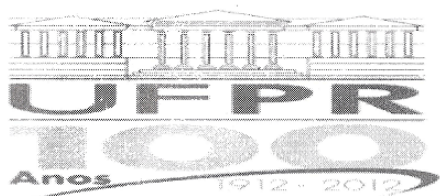
98 f. : tab.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física.

Orientador: Gilberto M. Kremer

1. Cosmologia. I. Kremer, Gilberto Medeiros. II. Título.

CDD 530.11



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418
E-mail: posgrad@fisica.ufpr.br

DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ANÁLISE DE CAMPO ESCALAR NÃO-MINIMAMENTE
ACOPLADO ATRAVÉS DO FORMALISMO DE PALATINI E SIMETRIA DE NOETHER.**

ALUNA

RAÍLA ANDRÉ

Em sessão pública iniciada às 14 horas do dia 22 de fevereiro de 2013, após um seminário sob o título acima e posterior arguição, esta banca examinadora decidiu atribuir à candidata o conceito global A.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Miguel Abbate
(UFPR)

Assinatura

MIGUEL ABBATE

Conceito

A

Prof. Dr. Fernando Haas
(UFPR)

Fernando Haas

A

Prof. Dr. Vicente Pleitez
(IFT-UNESP)

[Assinatura]

A

Dedico este trabalho ao meu pai, A. André.

Agradecimentos

- Ao Prof. Gilberto M. Kremer pela orientação, pelo incentivo, apoio e compreensão que sempre demonstrou;
- Ao Rudinei C. de Souza pela dedicação, disponibilidade e igualmente pelo seu apoio na elaboração deste trabalho;
- À minha família pelo apoio que sempre me prestou durante toda minha vida acadêmica, bem como à elaboração da presente dissertação a qual sem seu apoio teria sido impossível;
- À todos aqueles que de uma forma direta ou indireta, contribuíram ou auxiliaram na realização do presente estudo;
- Ao CNPq pelo suporte financeiro.

”O Universo não é uma idéia minha.

A minha idéia do Universo que é uma idéia minha.”

Fernando Pessoa

Resumo

Neste trabalho foi analisado um campo escalar não-minimamente acoplado à gravidade, no contexto de um Universo descrito pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) plana. O campo escalar é não-minimamente acoplado à gravidade através de uma função genérica $F(\phi)$, e seu potencial de auto-interação é dada por uma função genérica $V(\phi)$, sendo ϕ o campo escalar. O modelo adotado compreende um Universo preenchido pelos campos escalar e de matéria padrão (escura e bariônica). Variamos a ação do modelo em relação ao tensor métrico e à conexão afim de acordo com o formalismo Palatini, a partir da qual foram obtidas equações de campo de Einstein modificadas e uma equação dinâmica para a conexão afim. A conexão correspondente surge em termos do símbolo de Christoffel mais derivadas do campo escalar. Definindo um tensor energia-momento efetivo que absorve os termos que não são pertencentes ao símbolo de Christoffel da conexão afim, escrevemos as equações do campo gravitacional na forma padrão das equações de Einstein, através das quais identificamos a densidade de energia e de pressão efetivas do campo escalar. Além disso, através da variação da ação com respeito ao campo escalar determinamos a equação de campo correspondente, sob a forma de uma equação modificada Klein-Gordon. Da ação original do modelo na métrica FRW plana, uma Lagrangiana pontual de primeira ordem foi obtida, e simetria Noether foi aplicada a esta, a fim de descobrir as formas de Noether das funções indefinidas, *a priori*, de $F(\phi)$ e $V(\phi)$. Por fim, analisamos de forma comparativa, a teoria de campo escalar não-minimamente acoplado no formalismo Palatini frente ao formalismo métrico. Determinamos as soluções cosmológicas de Noether do modelo e analisamos a sua importância para a descrição do Universo no passado e no futuro.

Abstract

In this work we analyzed a scalar field non-minimally coupled to gravity in the context of a Universe described by the flat Friedmann-Robertson-Walker (F-R-W) metric. The scalar field is non-minimally coupled to gravity through a generic function $F(\phi)$ and its self-interaction potential is given by a generic function $V(\phi)$. The adopted model comprises a Universe filled by the scalar field and standard matter (dark and baryonic) fields. We varied the action of the model with respect to the metric tensor and to the connection according to the Palatini formalism, from which we obtained a dynamic equation for the connection and modified Einstein's equations. The corresponding connection emerges in terms of the Christoffel symbol plus derivatives of the scalar field. By defining an effective energy-momentum tensor that absorbs the non Christoffel symbol terms of the connection, we wrote the gravitational field equations in the standard form of the Einstein's equations, from which we identified the effective energy density and pressure of the scalar field. Furthermore, through the variation of the action with respect to the scalar field it was determined the corresponding field equation in the form of a modified Klein-Gordon equation. From the original action of the model in the flat F-R-W space-time, a point-like Lagrangian of first order was obtained and the Noether symmetry approach was applied to it in order to find out the Noether forms of the *a priori* undefined functions $F(\phi)$ and $V(\phi)$. Finally, we analyze in a comparative fashion the non-minimally coupled scalar field theory in the Palatini formalism with the metric formulation. We determine the Noether cosmological solutions of the model and analyse their respective importance for the description of the Universe in the past and in the future.

Sumário

Dedicatoria	4
Agradecimentos	i
Citacao	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Sumário	v
1 Introdução	1
2 Teoria da Relatividade	4
2.1 Relatividade Restrita	4
2.1.1 Aspectos Básicos da Teoria	5
2.2 Relatividade Geral	6
2.2.1 Equações de movimento em Relatividade Geral	8
2.2.2 Tensor Métrico e a Geometria do Espaço-Tempo	9

2.2.3	Relação entre a Conexão Afim e o Tensor Métrico	10
2.2.4	Tensor de Curvatura	11
2.2.5	Tensor de Ricci e Escalar de Curvatura	12
2.2.6	Tensor Energia-Momento	14
2.3	As equações de Campo de Einstein	15
2.3.1	Ação do Campo Gravitacional	16
2.3.2	Ação do Campo de Matéria	18
2.3.3	Ação Total	19
3	Cosmologia	21
3.1	A cosmologia como ciência	21
3.2	Fundamentação	22
3.2.1	Princípio Cosmológico	22
3.2.2	Lei de Hubble	23
3.3	Aplicação da Teoria da Relatividade Geral para a Métrica de Friedmann-Robertson-Walker	25
3.3.1	A métrica de Friedmann-Robertson-Walker	25
3.3.2	Tensor de Ricci e Escalar de Curvatura	26
3.3.3	Tensor Energia-Momento para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker	27
3.4	Equações do Modelo Padrão da Cosmologia	28
3.4.1	Equações de Friedmann e da Aceleração	28
3.4.2	Equação do Fluido	29
3.5	Parâmetros Observacionais	31
3.5.1	Parâmetro de densidade	31

3.5.2	Parâmetro de desaceleração	32
3.5.3	Distância de Luminosidade	33
3.6	Radiação Cósmica de Fundo	34
3.7	Densidade dos constituintes do Universo	37
3.7.1	Bárions	37
3.7.2	Radiação	38
3.7.3	Matéria Escura	39
3.7.4	Energia Escura	39
3.8	Modelos	41
3.8.1	Modelo da constante cosmológica	41
3.8.2	Modelo Λ CDM	42
3.8.3	Os problemas da constante cosmológica	42
3.8.4	Modelos com inflaton	43
3.8.5	Acoplamento ao Campo Gravitacional	45
3.8.6	Energia escura representada por um campo escalar	46
4	O modelo e o formalismo de Palatini	48
4.1	O Formalismo de Palatini	48
4.2	O modelo	51
4.2.1	Determinação da conexão afim generalizada $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$	55
4.2.2	Tensor de Ricci generalizado	56
4.2.3	Definição do Tensor Energia-Momento Efetivo	58
5	As equações de campo e a Lagrangiana pontual	60
5.1	As componentes do tensor energia-momento para o campo escalar	60

5.1.1	Componente temporal do Tensor Energia-Momento	61
5.1.2	Componentes espaciais do Tensor Energia-Momento	61
5.2	Equações da Aceleração e de Friedmann	63
5.2.1	Equação de Friedmann	63
5.2.2	Equação da Aceleração	64
5.3	A equação de Klein-Gordon	65
5.3.1	A equação de Klein-Gordon através da equação de Euler-Lagrange generalizada	65
5.3.2	A equação de Klein-Gordon através da variação da ação com res- peito ao campo escalar	66
5.4	A Lagrangiana pontual	67
5.4.1	Integração por partes em \ddot{a} e $\ddot{\phi}$ da Lagrangiana pontual	68
5.5	As equações de campo	70
5.5.1	Equação da aceleração a partir da densidade de Lagrangiana pon- tual integrada por partes em \ddot{a} e $\ddot{\phi}$	70
5.5.2	Função energia: Equação de Friedmann	70
5.5.3	Equação de Klein-Gordon a partir da Lagrangiana pontual inte- grada por partes em \ddot{a} e $\ddot{\phi}$	71
6	Simetria de Noether	72
6.1	Simetria de Noether	72
6.1.1	Condição para a existência da simetria de Noether	74
6.2	Constantes de Movimento	78
7	Solução das equações de campo	79
7.1	Soluções	79

7.2	Fator de escala e campo escalar	82
7.2.1	Primeira solução	82
7.2.2	Segunda solução	83
7.3	Análise das soluções	83
7.3.1	Forma assintótica para o fator de escala da primeira solução	83
7.3.2	Restrição das constantes	84
7.3.3	Forma assintótica para o campo escalar da primeira solução	86
7.3.4	Forma assintótica para o fator de escala da segunda solução	87
7.3.5	Forma assintótica para o campo escalar da segunda solução	88
7.4	Comparação entre o formalismo métrico e o de Palatini	89
8	Conclusões	92
	Referências Bibliográficas	94
A	Equação de Euler-Lagrange para Lagrangiana dependente de derivadas de segunda ordem	99
B	Redução da ordem das derivadas da Lagrangiana pontual: integração por partes em \ddot{a}	101

Capítulo 1

Introdução

Em 1917, Williem de Sitter [1] formulou um modelo não estático do Universo que acabou por constituir a base da cosmologia moderna. Em 1922 o modelo do Universo em expansão foi adotado por Alexander Friedmann [1]. Pouco depois, Edwin Hubble [2] publicou um trabalho no qual mostrava que as galáxias estavam, em média, se distanciando de nós com uma velocidade proporcional à distância. Em 1948, George Gamow [3] mostrou que a teoria de um Universo em expansão poderia explicar a abundância dos elementos químicos hidrogênio e hélio que observamos no Universo. Segundo ele, no início, a alta temperatura e densidade tornavam propícia a fusão nuclear. Entretanto, com a expansão do Universo, a temperatura diminuiu drasticamente, o que levou à diminuição das reações nucleares, justificando assim a presença em maior número dos elementos químicos mais leves. Gamow baseado nesse modelo, previu também, a existência de uma radiação isotrópica e de espectro bem definido que teria se originado na era primordial do Universo, conhecida hoje como radiação cósmica de fundo. Em 1965, Arno Penzias e Robert W. Wilson [4] detectaram essa radiação. A partir disso, diversas observações foram então realizadas para se certificar de sua existência e de suas características que comprovariam sua origem há bilhões de anos atrás. Essas observações, aliadas à formação das velocidades com que as galáxias estão se distanciando umas das outras [5] e à composição do Universo deram suporte para a teoria do Universo em expansão, que atualmente é amplamente aceita pela comunidade científica.

Além da questão da expansão do Universo, começaram a surgir, a partir de 1933,

observações astronômicas que indicavam que a quantidade de matéria visível em galáxias era bem menor que a quantidade de matéria necessária para gerar os efeitos gravitacionais observados. Em 1978, foi observado que a velocidade de rotação de galáxias espirais corresponde a uma concentração de massa maior do que a inferida por observações da luz emitida pela galáxia. Esse problema ficou conhecido como problema da massa faltante [6]. O acúmulo de observações como estas reforçou a possibilidade de existência de um tipo de ente desconhecido que não participa das interações fortes nem das eletromagnéticas [7]. A esse ente foi dada o nome de matéria escura [8]. Observações atuais indicam que cerca de 23% de toda a matéria existente atualmente no Universo deve ser escura.

Observações recentes da magnitude aparente e do desvio para o vermelho de supernovas indicaram que o Universo não só está em expansão como está em expansão acelerada [9]. Isto levou a ideia de um Universo dominado por uma forma de energia com pressão negativa, que o tem acelerado pelos últimos cinco bilhões de anos. A essa forma de energia deram o nome de energia escura [10]. Note que a energia escura é diferente da matéria escura, já que esta última, da mesma forma que a matéria ordinária, exerce atração gravitacional sobre outros corpos. Ela é chamada escura porque não emite radiação eletromagnética, e portanto, não pode ser detectada em nenhuma faixa do espectro eletromagnético. Já a energia escura provoca a repulsão sobre a matéria [11]. Atualmente acredita-se que 73% do Universo atual é constituído de energia escura. Dentro deste contexto, foram propostos vários candidatos para essa energia desconhecida, entre eles, a quintessência, que nada mais é do que um campo escalar representando esta energia.

Atualmente, a Cosmologia busca modelos que expliquem satisfatoriamente tanto a expansão acelerada atual como toda a evolução cosmológica, desde o período inflacionário até o presente. Um dos modelos mais investigados são aqueles que fazem uso de um campo escalar acoplado minimamente ou não-minimamente ao campo gravitacional, apresentando-se como inflaton (campo responsável pela inflação), ou como energia escura. O acoplamento mínimo ocorre quando o campo não está acoplado à curvatura do espaço-tempo, já no acoplamento não-mínimo ocorre o inverso, o campo está acoplado à curvatura do espaço-tempo.

Nesta dissertação, analisaremos um modelo cosmológico onde o campo escalar representa a energia escura, e que está acoplado não-minimamente à gravidade. Além desta energia, o modelo é composto também por matéria escura e ordinária. Buscando a ge-

neralidade nas soluções, realizaremos esta análise via formalismo de Palatini. O aspecto mais fundamental a ser observado nesse formalismo é a independência, *a priori*, entre a conexão afim e o tensor métrico. Através de uma relação entre simetria (invariância sob transformações de coordenadas), e quantidades conservadas, garantida pelo Teorema de Noether, alcançamos a simetria de Noether para a Lagrangiana pontual correspondente ao modelo. Através dela, determinaremos a forma do acoplamento e do potencial de auto-interação do campo escalar, evitando assim uma escolha *ad hoc* destes parâmetros. A partir desse procedimento, conseguimos eliminar naturalmente qualquer violação das leis de conservação.

Mostraremos ao final desta dissertação que as duas soluções obtidas do modelo em questão conseguem explicar a expansão acelerada do Universo. Uma dessas soluções consegue descrever a Era da Matéria com o constituinte, que descreve a matéria usual e a matéria escura, tendo uma pressão nula (período desacelerado do Universo). A outra solução, no entanto, não pode dar conta de descrever a tal Era da Matéria usual, mas sim um período em que um fluido efetivo (combinação de campo escalar e de matéria), dominava. Por fim, concluiremos, através de uma comparação entre formalismos, que as soluções do formalismo de Palatini descrevem uma dinâmica diferente das soluções do formalismo métrico.

Capítulo 2

Teoria da Relatividade

Neste capítulo apresentaremos de forma breve as Teorias da Relatividade Restrita e Geral com o intuito de que o leitor possa compreender o desenvolvimento do trabalho que será exposto nesta dissertação.

2.1 Relatividade Restrita

A Teoria da Relatividade Restrita foi proposta por Albert Einstein em 1905 [12]. Antes disto tínhamos a ideia de espaço e tempo absoluto como era descrito pela física Newtoniana. Hendrik Lorentz percebeu que a física Newtoniana era incompatível com o Eletromagnetismo, visto que as equações que regem os fenômenos eletromagnéticos não eram invariantes segundo uma transformação de Galileu (as leis da mecânica newtoniana são invariantes sob esta transformação de coordenadas) [13]. Uma transformação de coordenadas sugerida para substituir a de Galileu foi a transformação de Lorentz. O uso original desta nova transformação precedeu o desenvolvimento da teoria da relatividade restrita. É importante notar que esta transformação segue os postulados básicos desta teoria. De acordo com o primeiro postulado, as leis de um fenômeno físico são as mesmas em todos os referenciais inerciais, o que era demonstrado pela transformação de Lorentz. Já o segundo postulado, afirma que a velocidade da luz (no espaço livre) é uma constante universal, independente de qualquer movimento relativo da fonte e do observador [13].

A primeira consequência importante desta teoria é que o tempo não é absoluto para

todos os referenciais, mas depende destes, passando mais devagar para quem se move. A segunda consequência importante é que os eventos que são simultâneos para um referencial não serão necessariamente simultâneos para outros referenciais que se movem. Assim, com as leis da natureza que se reduzem à leis de Newton no regime de baixas velocidades (velocidades bem menores do que a da luz), foi possível aperfeiçoar a teoria clássica, agora generalizada para baixas e altas velocidades (para velocidades bem menores e para próximas a da luz, respectivamente).

2.1.1 Aspectos Básicos da Teoria

Por volta de 1907, o matemático Hermann Minkowski [14], reformulou matematicamente a teoria da relatividade restrita e unificou o espaço tridimensional euclidiano com o tempo, resultando no que chamamos de Espaço de Minkowski. Qualquer ponto no espaço euclidiano pode ser especificado como um vetor posição com três componentes, já que se trata de um espaço tridimensional [15]. No espaço de Minkowski o tempo aparece como uma quarta componente desse vetor posição, agora chamado de quadrivetor, daí surge a idéia do espaço com quatro dimensões: três espaciais e uma temporal. Temos então, o espaço-tempo.

Neste contexto, passamos a substituir a notação (t, x, y, z) por $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, onde $x^0 = ct$, para manter a coerência dimensional, e as outras coordenadas são as coordenadas espaciais já conhecidas.

Uma transformação de Lorentz de um sistema de coordenadas x^α para x'^α no espaço-tempo é feito da seguinte forma

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta, \quad (2.1)$$

onde x'^α e x^α são quadrivetores e Λ^α_β , é a matriz de Lorentz, responsável pela transformação.

Para um observador O' que se move com velocidade v , ao longo do eixo x , em relação a outro observador O , então os eventos se relacionam através da seguinte matriz

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.3)$$

2.2 Relatividade Geral

Em 1915 Albert Einstein [14], propôs a Teoria da Relatividade Geral. Esta nova teoria trouxe consigo novas idéias a respeito do espaço e do tempo, além de generalizar o princípio da relatividade para sistemas que incluam campo gravitacional. Esta generalização tem várias implicações, uma delas é que a matéria curva o espaço-tempo à sua volta. Portanto, a gravitação é um efeito geométrico do espaço-tempo [16].

A Teoria da Relatividade Geral tem como postulado o fato de que sistemas acelerados serem fisicamente equivalentes àqueles submetidos à campos gravitacionais, o que torna a massa inercial e a gravitacional equivalentes [12]. No regime não-relativístico a teoria se reduz à gravitação de Newton.

Embora a Relatividade Restrita tenha se estendido às leis do eletromagnetismo, ela não era compatível com as leis da gravitação newtoniana. Segundo Newton, se a distribuição de matéria se alterasse em algum lugar do espaço, a mudança referente ao campo gravitacional seria sentida instantaneamente em qualquer parte do Universo. No entanto, isto não fazia mais sentido, visto que violariamos os postulados da Relatividade Restrita, já que poderíamos enviar sinais à velocidades maiores do que a da luz, além do que um tempo absoluto seria exigido.

Com o objetivo de resolver estes e outros problemas, Einstein introduziu uma conexão

entre movimento acelerado e gravidade, conhecido como Princípio da Equivalência, que é assim enunciado: "em cada ponto de um espaço-tempo imerso em um campo gravitacional arbitrário é possível escolhermos um sistema de coordenadas localmente inercial de forma que, em uma região suficientemente pequena em torno do ponto em questão, as leis da natureza tenham a mesma forma que em um sistema de coordenadas cartesianas na ausência de aceleração"[17]. Portanto, alguém em uma caixa totalmente fechada, por exemplo, não é capaz de distinguir se está em repouso em um campo gravitacional ou se está acelerando no espaço livre. A igualdade entre massa inercial e gravitacional só poderia ser uma indicação de uma conexão entre inércia e gravidade [18].

Costuma-se expressar o Princípio da Equivalência por meio do Princípio da Covariância Geral, que postula que "uma equação é válida em um campo gravitacional arbitrário se ela valer na ausência de gravidade, ou seja, se ela concordar com a Relatividade Restrita e se ela preservar a sua forma sob uma transformação geral de coordenadas, ou em outras palavras, pode ser escrita de forma covariante"[17].

Einstein teve que renunciar ao espaço-tempo plano para compatibilizar a interação gravitacional com a Relatividade Restrita começando por analisar o carácter universal da gravitação. A gravidade é uma força diferente de todas as outras da natureza: não importa qual seja a massa ou a constituição dos corpos, eles sempre vão cair ao longo da mesma trajetória espacial. Este fato sugere que a gravidade não é uma força, mas sim uma propriedade do espaço-tempo. Portanto, os observadores em queda livre em um campo gravitacional identificam-se localmente com observadores inerciais da relatividade restrita. Mas temos que observar que na Relatividade Geral dois observadores em queda livre não mantem uma velocidade uniforme entre si devido aos efeitos não locais do campo gravitacional. Para justificar estas diferenças, Einstein propôs que a gravidade é uma modificação da geometria euclidiana. O campo gravitacional é resultado da curvatura do espaço. Agora as trajetórias descritas pelos corpos em queda livre serão geodésicas (trajetória de menor comprimento que une dois pontos), neste espaço curvo. As geodésicas não serão mais linhas retas como eram no caso de espaço plano [19].

2.2.1 Equações de movimento em Relatividade Geral

Imaginemos uma partícula em queda livre sob ação de um campo gravitacional, em um sistema de coordenadas θ^α que se move juntamente com a partícula. Portanto, neste referencial não se observa aceleração

$$\frac{d^2\theta^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (2.4)$$

onde τ é o tempo próprio conhecido da relatividade restrita.

É interessante relacionarmos o sistema de coordenadas θ^α com um sistema de coordenadas cartesiano x^μ que está em repouso em relação ao laboratório. Utilizamos a regra da cadeia para relacionar tais sistemas

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial\theta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0. \quad (2.5)$$

Derivando e usando novamente a regra da cadeia, chegamos a

$$\frac{\partial\theta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2\theta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.6)$$

Multiplicamos a equação acima por $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \theta^\alpha}$ e obtemos

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial^2\theta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.7)$$

de onde definimos a conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial^2\theta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (2.8)$$

Ressaltamos aqui que a conexão afim não é um tensor, embora aparente ser, pois não obedece a regra que rege a transformação de tensores e que governa o transporte paralelo de campos tensoriais ao longo de uma dada curva no espaço-tempo [14]. De (2.8) vimos que, neste caso, ela é simétrica sob troca de índices inferiores, visto que as derivadas de primeira ordem comutam.

2.2.2 Tensor Métrico e a Geometria do Espaço-Tempo

Definimos como métrica o elemento de linha ds^2 que mede a distância entre dois pontos em um espaço de dimensão qualquer. No referencial inercial local é válido usarmos a métrica do espaço-tempo plano da relatividade restrita conhecida como métrica de Minkowski

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta. \quad (2.9)$$

Observando que podemos escrever $d\theta^\alpha$ como

$$d\theta^\alpha = \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu, \quad (2.10)$$

e analogamente para $d\theta^\beta$.

Com isto escrevemos a métrica da seguinte maneira

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.11)$$

onde definimos

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (2.12)$$

Desta maneira temos a relação entre o tensor métrico segundo o referencial do laboratório $g_{\mu\nu}$ e o tensor métrico segundo o referencial inercial local $\eta_{\alpha\beta}$. Assim, podemos reescrever a métrica do seguinte modo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.13)$$

O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é importante no contexto da relatividade geral. É a partir dele que todas as quantidades geométricas são encontradas. Com ele medimos a distância entre dois pontos e ângulos entre vetores em um espaço-tempo curvo.

A partir de (2.12) nota-se que o tensor métrico é simétrico, pois podemos trocar os índices livremente sem qualquer problema, visto que ambos estão contraídos, e que as derivadas de primeira ordem comutam.

A equação (2.12) define um tensor métrico covariante. Podemos definir a versão contravariante da seguinte maneira

$$g^{\nu\sigma} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \theta^\beta}. \quad (2.14)$$

Calculando o produto entre (2.14) e (2.12), obtemos

$$g^{\nu\sigma} g_{\mu\nu} = \delta_\mu^\sigma, \quad (2.15)$$

onde usamos a seguinte relação: $\eta^{\alpha\beta} \eta_{\mu\alpha} = \delta_\mu^\beta$.

Definimos a quantidade g como o determinante do tensor métrico:

$$g = \det(g_{\mu\nu}). \quad (2.16)$$

2.2.3 Relação entre a Conexão Afim e o Tensor Métrico

Multiplicando a definição da conexão afim (2.8) por $\frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^\lambda}$, obtemos

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 \theta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (2.17)$$

Calculando a derivada de (2.12) em relação a x^λ temos

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 \theta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \theta^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \eta_{\alpha\beta}. \quad (2.18)$$

Fazendo uso de (2.17) chegamos a

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^\mu} \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \frac{\partial \theta^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta}. \quad (2.19)$$

Reconhecendo $g_{\rho\nu}$ e $g_{\rho\mu}$ na expressão acima e lembrando da propriedade de simetria do tensor métrico, simplificamos (2.19) para

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu}. \quad (2.20)$$

Fazendo a soma de três termos da expressão acima com índices permutados e observando que a conexão afim é simétrica em relação a seus índices inferiores chegamos a

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = 2\Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\rho\nu}. \quad (2.21)$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $g^{\nu\sigma}$ temos

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right). \quad (2.22)$$

Desta maneira, obtemos uma expressão que relaciona a conexão afim, também conhecida neste caso por símbolo de Christoffel, e o tensor métrico.

2.2.4 Tensor de Curvatura

Sabemos que a derivada de um tensor não gera outro tensor. A operação que realiza esta tarefa é conhecida como derivada covariante.

$$\nabla_\lambda V^\mu = V^\mu_{;\lambda} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\kappa}^\mu V^\kappa. \quad (2.23)$$

Mas a derivada covariante não é comutativa ao contrário da derivada parcial. Para um tensor V^λ definimos o seguinte comutador

$$[\nabla_\kappa \nabla_\nu] V^\lambda = \nabla_\kappa \nabla_\nu V^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\kappa V^\lambda. \quad (2.24)$$

Aplicando a definição de derivada covariante (2.23) duas vezes na expressão acima, obtemos

$$[\nabla_\kappa \nabla_\nu] V^\lambda = \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma \right) V^\mu. \quad (2.25)$$

Agora podemos definir o tensor de curvatura de Riemann

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma. \quad (2.26)$$

Observamos que em um transporte paralelo de um vetor, as componentes do tensor de Riemann, ao longo de uma geodésica, são as mesmas em todos os pontos da trajetória (o ângulo entre o vetor e a tangente à geodésica mantém-se inalterado), para o caso de um espaço-tempo plano.

Usamos a propriedade do tensor métrico, de abaixamento de índice, para definirmos o tensor de Riemann covariante

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\sigma} R^{\sigma}_{\mu\nu\kappa}. \quad (2.27)$$

Fazendo uso de (2.26), (2.22) e de (2.20), obtemos uma expressão para o tensor de Riemann covariante

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^k \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right) + g_{\eta\sigma} (\Gamma^{\eta}_{\nu\lambda} \Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa} - \Gamma^{\eta}_{\kappa\lambda} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}). \quad (2.28)$$

Podemos extrair as seguintes propriedades do tensor de Riemann:

(i) Simetria

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}. \quad (2.29)$$

(ii) Anti-Simetria

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\lambda\kappa\nu}. \quad (2.30)$$

(iii) Ciclicidade

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0. \quad (2.31)$$

2.2.5 Tensor de Ricci e Escalar de Curvatura

Definimos o tensor de Ricci como

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}, \quad (2.32)$$

que é obtido através da contração entre dois dos índices do tensor de Riemann.

E contraindo o tensor de Ricci com a métrica, temos o escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}. \quad (2.33)$$

que relaciona a cada ponto do espaço-tempo um único número real.

Calculamos agora a derivada covariante de (2.28)

$$\nabla_\eta R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\eta} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right). \quad (2.34)$$

Usando a propriedade de ciclicidade do tensor de Riemann (2.31), obtemos as identidades de Bianchi

$$\nabla_\eta R_{\lambda\mu\nu\kappa} + \nabla_\kappa R_{\lambda\mu\eta\nu} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu\kappa\eta} = 0. \quad (2.35)$$

Contraindo os índices λ e ν através da multiplicação das identidades de Bianchi pelo tensor métrico $g^{\lambda\nu}$ temos

$$\nabla_\eta R_{\mu\kappa} - \nabla_\kappa R_{\mu\eta} + \nabla_\nu R_{\mu\kappa\eta}^\nu = 0, \quad (2.36)$$

onde o sinal negativo vem da aplicação da propriedade de anti-simetria (2.30). Contraindo agora os índices μ e κ e aplicando novamente a propriedade de anti-simetria encontramos a seguinte expressão

$$\nabla_\eta R - \nabla_\kappa R_\eta^\kappa - \nabla_\nu R_\eta^\nu = 0. \quad (2.37)$$

Podemos reescrever esta equação como

$$\nabla_\mu \left(R_\eta^\mu - \frac{1}{2} \delta_\eta^\mu R \right) = 0. \quad (2.38)$$

Observamos que para reescrevê-la desta maneira apresentada acima, tivemos que fazer as seguintes trocas de índices: no segundo termo trocamos κ por μ e no último termo trocamos ν por μ . Lembramos que inserimos δ_η^μ no primeiro termo para ser possível agrupar todos os termos da equação.

Multiplicando pelo tensor métrico $g^{\nu\eta}$, temos as identidades de Bianchi contraídas,

notando que $\nabla_\mu g^{\mu\eta} = 0$,

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0. \quad (2.39)$$

O termo em parênteses é conhecido como tensor de Einstein. Como veremos, as identidades de Bianchi tem um papel importante na Relatividade Geral, pois estão associadas a uma lei de conservação.

2.2.6 Tensor Energia-Momento

O tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ representa o fluxo do quadrimomento p_μ (fluxo de energia e momento), através da hipersuperfície que engloba as fontes do campo. Este tensor é simétrico, ou seja, $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$. As suas componentes carregam consigo significado físico: a componente T_{00} é a densidade de energia, as componentes espaço-temporais T_{i0} representam a densidade da i -ésima componente de momento, as componentes espaciais T_{ii} designam o fluxo da i -ésima componente de momento através da superfície cuja direção normal está na direção i e as componentes espaciais (com índices de valores diferentes), T_{ij} , representam o fluxo da i -ésima componente de momento através da superfície, cuja direção normal está na direção j .

A lei de conservação do tensor energia-momento é expressa pela condição de nulidade da derivada covariante de $T_{\mu\nu}$

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.40)$$

onde a quantidade conservada guarda todas as fontes do campo gravitacional considerado.

No contexto da relatividade restrita (espaço-tempo plano), a conservação do tensor energia-momento é expressa da seguinte maneira

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.41)$$

2.3 As equações de Campo de Einstein

A teoria da gravitação de Einstein não somente nos informa que o espaço-tempo é curvo mas também de quanto é sua curvatura. Ela nos fornece um conjunto de equações que relacionam a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de matéria-energia no espaço. Portanto, o campo gravitacional pode ser interpretado como a curvatura do espaço-tempo.

As equações propostas por Einstein são chamadas de equações de campo, pois elas descrevem o comportamento e as propriedades do campo gravitacional. Para encontramos tais equações usaremos o princípio da mínima ação

$$\delta S_T = 0, \quad (2.42)$$

onde S_T é a soma da ação do campo gravitacional S_g com a ação do campo de matéria S_m . As expressões para estas ações seguem logo abaixo

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \mathcal{L}_g d^4x \sqrt{-g}; \quad (2.43)$$

$$S_m = \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_m d^4x \sqrt{-g}, \quad (2.44)$$

onde $d^4x \sqrt{-g}$ é o elemento invariante do espaço-tempo, G é a constante gravitacional de Newton, $\mathcal{L}_g = \mathcal{L}_g(g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu})$ e $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu})$, são as densidades de Lagrangiana do campo gravitacional e da matéria, respectivamente. Vale ainda citar que para determinarmos a ação, sua integral não deve depender da escolha do sistema de coordenadas, ou seja, a ação deve ser invariante sob transformações de Lorentz. Portanto, a ação deve ser uma grandeza escalar [20].

O termo \mathcal{L}_g deve ser um escalar. Este escalar deve ter pelo menos derivadas segundas da métrica não nulas, já que a métrica propriamente dita e suas derivadas primeiras podem ser anuladas por uma escolha de referencial. Como sabemos, o tensor de Riemann é o que satisfaz esta exigência, e que por sua vez, o único escalar que pode ser construído através

dele é o escalar de curvatura R . Portanto, podemos reescrever a ação total como

$$S_T = S_g + S_m = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (2.45)$$

onde $\int d^4x \sqrt{-g} R$ é a ação de Einstein-Hilbert.

2.3.1 Ação do Campo Gravitacional

Agora, usaremos a definição do escalar de curvatura (2.33) na ação gravitacional (2.43) e aplicaremos o princípio da mínima ação

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int (R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \sqrt{-g}) d^4x, \quad (2.46)$$

onde a variação é feita com relação a $g_{\mu\nu}$.

Para encontrarmos $\delta \sqrt{-g}$, temos que utilizar a seguinte relação

$$M^{ij} = \frac{\mathcal{M}_{ij}}{m}, \quad (2.47)$$

onde M^{ij} é uma matriz qualquer, m é o determinante desta, ou seja, $m = \det(M_{ij})$, e \mathcal{M}_{ij} é o cofator da matriz M_{ij} , que podemos escrever como $\mathcal{M}_{ij} = \text{cof}(M_{ij})$. Temos ainda que

$$m = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \mathcal{M}_{ij}, \quad (2.48)$$

onde $M^{ij} = (M_{ij})^{-1}$. Derivando (2.48) com relação a M_{ij} e usando (2.47) chegamos a

$$\frac{\partial m}{\partial M_{ij}} = m M^{ij}. \quad (2.49)$$

Com posse destas expressões e sabendo que

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g, \quad (2.50)$$

renomeamos m por $g = \det(g_{\mu\nu})$ e M^{ij} por $g^{\mu\nu}$. Através de (2.49) obtemos

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.51)$$

Lembrando que $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = 4$, temos

$$g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.52)$$

Substituindo em (2.51)

$$\delta g = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.53)$$

Finalmente aplicando este resultado a (2.50) chegamos a expressão desejada

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.54)$$

Podemos escrever (2.46) como

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \frac{c^3}{16\pi G} \int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} d^4x. \quad (2.55)$$

Para calcularmos a variação de $R_{\mu\nu}$, lembramos que $R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda$ e usamos a definição do tensor de Riemann (2.26)

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\lambda} + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda + \delta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\eta - \delta \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda - \delta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\eta. \quad (2.56)$$

Já sabemos que a conexão afim não é um tensor mas a sua diferencial $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ pode ser considerada um tensor? É possível mostrar que $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$, visto que se trata da diferença entre duas conexões afins definidas num mesmo ponto. Portanto, podemos definir a derivada covariante da diferencial da conexão afim como

$$\nabla_\kappa (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) = \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} + \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\eta - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \delta \Gamma_{\eta\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\kappa}^\eta \delta \Gamma_{\mu\eta}^\lambda. \quad (2.57)$$

Substituindo em (2.56), reescrevemos $\delta R_{\mu\nu}$ da seguinte maneira

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - \nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda). \quad (2.58)$$

Usamos este resultado para calcular a integral do segundo termo de (2.55)

$$\int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} d^4x = \int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} [\nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - \nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda)] d^4x. \quad (2.59)$$

Lembrando que a derivada covariante do tensor métrico $\nabla_\lambda g^{\mu\nu}$ se anula, podemos mover $g^{\mu\nu}$ para dentro do colchetes, realizando troca de índices apenas no primeiro termo da expressão

$$\int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} d^4x = \int \sqrt{-g} \nabla_\lambda (g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) d^4x. \quad (2.60)$$

Os termos dentro dos parênteses são densidades vetoriais de peso +1, desta maneira podemos trocar suas derivadas covariantes por derivadas ordinárias [14]. Sendo assim, é possível utilizarmos o teorema da divergência, transformando a integral de volume em uma de superfície, que se anula na fronteira de integração. Desta forma, obtemos

$$\int \sqrt{-g} \nabla_\lambda (g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) d^4x = \oint \sqrt{-g} (g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) dS_\lambda = 0. \quad (2.61)$$

Portanto, temos como variação da ação do campo gravitacional a seguinte expressão

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.62)$$

2.3.2 Ação do Campo de Matéria

Variando a ação do campo de matéria (2.44) com respeito a $g_{\mu\nu}$ obtemos

$$\delta S_m = \frac{1}{c} \int \delta (\mathcal{L}_m \sqrt{-g}) d^4x = \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.63)$$

Definimos o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ da seguinte forma

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.64)$$

2.3.3 Ação Total

Combinando (2.62) e (2.63), escrevemos a variação da ação total com relação a $g_{\mu\nu}$ como

$$\delta S_T = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (2.65)$$

Como o termo $\delta g^{\mu\nu}$ é arbitrário, o princípio da ação mínima só será satisfeito se tivermos

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.66)$$

Esta equação é conhecida como as equações de campo de Einstein, e definimos $G_{\mu\nu}$, o tensor de Einstein. O lado direito descreve a distribuição das fontes de matéria-energia e o lado esquerdo a geometria do espaço-tempo responsável por esta distribuição.

O lado esquerdo das equações de Einstein satisfaz as identidades contraídas de Bianchi (2.39). Devido a isto, temos que a derivada covariante de seu lado direito também é nula, portanto as fontes do campo gravitacional devem obedecer à lei de conservação do tensor energia-momento (2.40), o que torna consistente a teoria.

Se adicionarmos à equação (2.66) um termo linear em $g_{\mu\nu}$, as identidades de Bianchi continuam a ser satisfeitas e as equações de Einstein permanecem fisicamente consistentes, pois $\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.67)$$

onde Λ é a constante cosmológica introduzida por Einstein para viabilizar um Universo estacionário.

Fazendo uma contração com $g^{\mu\nu}$ podemos reescrever as equações de Einstein (2.66) como

$$R = \frac{8\pi G}{c^4} T, \quad (2.68)$$

pois $T = T^\mu_\mu$ é o traço do tensor energia-momento. Se substituirmos (2.68) em (2.66)

teremos

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (2.69)$$

Para vácuo, $T_{\mu\nu}$ é nulo e as equações de campo de Einstein se reduzem a

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.70)$$

Através deste capítulo introduzimos os aspectos básicos das teorias da Relatividade Restrita e Geral. As equações de movimento derivadas a partir do *Princípio da Covariância* foram obtidas. O tensor métrico e a conexão afim foram definidos a partir destas. Mostramos a relação entre a geometria do espaço-tempo e o tensor métrico. Os tensores de curvatura de Riemann e o de Ricci foram apresentados, assim como o próprio escalar deste último. A definição de tensor energia-momento foi introduzida, bem como a lei de conservação a que este é submetido. Por fim, a ação de Einstein-Hilbert foi apresentada juntamente com a ação responsável pelo setor da matéria. As equações de campo de Einstein com fontes, derivadas destas ações, foram obtidas. Mostrou-se também, a forma de tais equações quando não se tem fontes.

Capítulo 3

Cosmologia

Neste capítulo serão apresentadas, de forma breve, algumas idéias e conceitos presentes na cosmologia. Vamos ainda aplicar a teoria da relatividade geral para uma métrica específica afim de obter as suas equações diferenciais correspondentes. Por fim, serão expostos alguns modelos cosmológicos que tem como proposta explicar a evolução do Universo em concordância com os dados observacionais.

3.1 A cosmologia como ciência

Mas afinal, o que é cosmologia? Cosmologia é o estudo da estrutura dinâmica do Universo como um todo, ou seja, é a ciência que estuda a estrutura, a evolução e a composição do Universo.

A cosmologia moderna surgiu no século XX com a teoria da relatividade. O primeiro artigo foi escrito por Albert Einstein em 1917 [21]. Neste trabalho, ele analisou o Universo como um todo através da relatividade, introduzindo o conceito de constante cosmológica. Essa constante foi proposta com o intuito de permitir soluções cosmológicas estáticas. Esta questão será discutida com mais detalhes ainda neste capítulo.

No entanto, percebeu-se posteriormente que mesmo com a presença desta constante cosmológica era possível obter soluções dinâmicas nas quais o Universo poderia se expandir ou se contrair. Essas soluções são conhecidas genericamente hoje por soluções de

Friedmann, nome que faz referência a Alexander Friedmann [21] matemático que obteve estas equações em 1922.

Com o desenvolvimento de melhores telescópios no início do século XX, foi possível estudar o Universo em escalas ainda não exploradas. Edwin Hubble foi um dos que iniciaram um estudo sistemático de outras galáxias além da nossa, a Via Láctea [22]. Ele notou que elas pareciam estar se afastando da nossa, e que a velocidade deste afastamento aumentava com a distância relativa entre a galáxia observada e a Via Láctea.

Observações como estas pertimiram estabelecer fundamentos para a cosmologia. Um deles é o princípio cosmológico que estabelece o Universo como homogêneo e isotrópico em larga escala. Estas e outras observações permitiram também que a cosmologia se afirmasse como ciência.

3.2 Fundamentação

3.2.1 Princípio Cosmológico

A cosmologia moderna afirma que o lugar onde ocupamos no Universo não tem nada de especial. Esta afirmação é conhecida como princípio cosmológico. Nem sempre foi assim, os gregos acreditavam que a Terra ocupava um lugar privilegiado, o centro do Universo, como afirmou Cláudio Ptolomeu. Esta ideia foi defendida até meados do ano de 1500 quando Nicolaus Copérnico [23], declarou que a Terra, assim como os outros planetas do sistema solar orbitavam o Sol. No entanto, a ideia de uma localização privilegiada no Universo permaneceu, agora com o Sol ocupando o centro do Universo [24].

Duzentos anos depois, William Herschels [25] identificou em suas observações uma estrutura em disco, agora conhecida como nossa galáxia, a Via Láctea. Porém, ele concluiu erroneamente ao afirmar que o sistema solar ocupava o centro da galáxia. Somente em meados de 1900 que fomos convencidos por Harlow Shapley [26], que o sistema solar não ocupa o centro da galáxia, e que por sua vez, a galáxia não ocupa o centro do Universo, mas que estamos a aproximadamente dois terços do raio de distância do centro da galáxia. Em 1952, Wilhelm Heinrich Walter Baade [2] demonstrou que a Via Láctea é uma galáxia típica como outra qualquer observada, o que levou ao ponto de vista moderno, conhecido

como princípio cosmológico. Portanto, o Universo apresenta o mesmo aspecto de todos os pontos, exceto por inomogeneidades locais [27].

Há evidências de que o Universo é suave em largas escalas (cerca de 170 Mpc) [24], o que sustenta o princípio cosmológico. Costuma-se afirmar que em grandes escalas o Universo possui duas propriedades importantes, a homogeneidade e isotropia. A homogeneidade diz respeito ao fato de que o Universo é o mesmo quando olhado em cada ponto do espaço, e a isotropia, de que ele é o mesmo quando olhado em todas as direções possíveis [2].

3.2.2 Lei de Hubble

Em 1929, através de diversas observações de galáxias distantes, Hubble descobriu que estas galáxias estavam se afastando rapidamente de nós e que todas as galáxias, simultaneamente, se afastavam uma das outras. Seu resultado baseou-se na descoberta de uma relação linear entre a distância \vec{r} das galáxias até nós e a velocidade \vec{v} com que elas se afastam de nós. Essa relação é conhecida como lei de Hubble [27],

$$\vec{v} = H_0 \vec{r}, \quad (3.1)$$

onde H_0 é o parâmetro de Hubble atual, e seu valor hoje é $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [2].

Com isto, introduzimos agora um sistema de coordenadas que acompanham a expansão, conhecidas como coordenadas comóveis. Neste sistema, um observador estacionário, que participa da expansão terá a mesma coordenada em todos os instantes

$$\vec{r} = a(t) \vec{x}, \quad (3.2)$$

onde \vec{r} é a distância real, \vec{x} é a distância comóvel (valor constante no tempo), e $a(t)$ é o fator de escala, que é definido como a medida da expansão do Universo normalizada para as distâncias que são observadas hoje. O fator de escala mede quantas vezes as distâncias físicas eram menores no passado quando comparadas com as mesmas distâncias medidas hoje [1]. Convenciona-se que hoje ($t = t_0$) o fator de escala é unitário.

Combinando (3.2) e (3.1) obtemos o parâmetro de Hubble

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.3)$$

Aqui a constante de Hubble foi generalizada para um tempo qualquer, por isto passou a ser chamada de parâmetro, não mais de constante. O parâmetro atual é H_0 e seu valor positivo implica que o Universo está em expansão.

Mas não apenas as galáxias estão se afastando da nossa galáxia, outros objetos presentes no Universo também estão, e quanto mais longe eles estiverem, maior parecem suas velocidades de recessão. Essas velocidades são medidas através do desvio para o vermelho z , conhecido pelo termo "redshift". A partir do efeito Doppler para ondas luminosas temos

$$z \equiv \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \simeq \frac{v}{c}, \quad (3.4)$$

onde λ_{em} é o comprimento de onda da luz emitida pelo objeto e λ_{obs} é o comprimento de onda da luz proveniente do objeto que observamos. O efeito Doppler mencionado aqui não é de origem cinemática, resultado de afastamento entre a fonte o observador, mas uma consequência da própria expansão do espaço. Quando uma onda se propaga num espaço em expansão, o seu comprimento de onda sofrerá um aumento proporcional ao valor do fator de escala do Universo. A partir de (3.4) podemos escrever o fator de escala em função do "redshift"

$$a(z) = \frac{1}{1+z}. \quad (3.5)$$

A primeira vista parece que o princípio cosmológico está sendo violado quando se considera que todos os objetos estão se afastando do nosso ponto de observação, a Terra, isto nos levaria a pensar que estaríamos em um ponto privilegiado do Universo. Todavia, qualquer observador em qualquer parte do Universo observa o mesmo.

3.3 Aplicação da Teoria da Relatividade Geral para a Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Definiremos nesta seção uma métrica para o espaço-tempo, em seguida, através dela escreveremos a conexão afim. Com isto, encontraremos o tensor de Riemann, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura. Após todo este procedimento, definiremos um tensor energia-momento, para enfim, resolveremos as equações de Einstein para tal métrica com o objetivo de encontrar um conjunto de equações diferenciais que descreva o modelo proposto.

3.3.1 A métrica de Friedmann-Robertson-Walker

O intervalo diferencial invariante ds^2 em função do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ foi definido anteriormente como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.6)$$

Levando em consideração o princípio cosmológico e considerando um espaço tridimensional, a métrica que pode ser construída é a conhecida como métrica de Friedmann-Robertson-Walker, que em coordenadas esféricas se apresenta da seguinte maneira

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3.7)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala e k é a constante de curvatura que está associada à três geometrias que satisfazem o princípio cosmológico: $k = 0$, espaço plano, $k > 0$, espaço esférico e $k < 0$, espaço hiperbólico.

Comparando (3.7) com (3.6) determinamos o tensor métrico na forma matricial

$$g_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a(t)^2/(1-k^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

A partir daqui faremos os índices gregos assumirem os valores (t, r, θ, ϕ) . Somente as componentes da diagonal não são nulas $g_{tt}, g_{rr}, g_{\theta\theta}$ e $g_{\phi\phi}$.

3.3.2 Tensor de Ricci e Escalar de Curvatura

Para calcularmos o tensor de Ricci devemos encontrar os elementos da conexão afim, já que conhecemos a forma do tensor métrico (3.3.1). Fazemos isto usando (2.22). Portanto, temos os seguintes elementos não nulos

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{a\dot{a}}{c(1-kr^2)}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^t = \frac{a\dot{a}r^2}{c}; \quad \Gamma_{\phi\phi}^t = \frac{a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta}{c}; \quad (3.9)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{1-kr^2}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1-kr^2); \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r(1-kr^2) \sin^2 \theta; \quad (3.10)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta; \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}; \quad (3.11)$$

$$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{t\phi}^\phi = \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.12)$$

Depois de encontrarmos as componentes não nulas da conexão afim, determinaremos as componentes do tensor de Ricci (2.32), usando a definição do tensor de curvatura (2.26).

E suas componentes não nulas para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker são

$$R_{tt} = \frac{3}{c^2} \ddot{a}; \quad R_{rr} = -\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2}{c^2(1 - kr^2)}, \quad (3.13)$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2)r^2}{c^2}; \quad R_{\phi\phi} = -\frac{(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2)r^2 \sin^2\theta}{c^2}. \quad (3.14)$$

A partir da definição (2.33), obtemos o escalar de curvatura para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker

$$R = \frac{6}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} \right]. \quad (3.15)$$

3.3.3 Tensor Energia-Momento para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker

O tensor energia-momento (fonte do campo gravitacional) será descrito como um fluido perfeito que obedece a seguinte equação

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U_\mu U_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

onde U^μ é um campo vetorial de velocidade do fluido, ρ é sua densidade de energia e p é sua pressão.

Considerando um sistema de coordenadas comóveis faremos $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$. Desta forma, através de (3.16) determinamos o tensor energia momento de um fluido perfeito para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pa(t)^2/(1 - k^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pa(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pa(t)^2 r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

3.4 Equações do Modelo Padrão da Cosmologia

Nesta seção serão apresentadas as equações de grande relevância para a cosmologia: as equações de Friedmann, da aceleração e do fluido.

3.4.1 Equações de Friedmann e da Aceleração

Utilizando as componentes do tensor de Ricci (3.13) e (3.14), o tensor métrico (3.3.1), o tensor energia-momento (3.3.3) e o escalar de curvatura (3.15), escrevemos as equações de Einstein para as componentes espaciais e temporal. Considerando primeiramente a componente temporal, observando que os índices sublinhados indicam que eles não estão sendo somados (neste caso, não se trata da soma da convenção de Einstein), temos

$$R_{\underline{t}\underline{t}} - \frac{1}{2}g_{\underline{t}\underline{t}}R + \Lambda g_{\underline{t}\underline{t}} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\underline{t}\underline{t}}. \quad (3.18)$$

Obtemos a partir desta a conhecida equação de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (3.19)$$

Considerando agora as componentes espaciais, obtemos

$$R_{\underline{i}\underline{i}} - \frac{1}{2}g_{\underline{i}\underline{i}}R + \Lambda g_{\underline{i}\underline{i}} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\underline{i}\underline{i}}. \quad (3.20)$$

Temos então, para qualquer componente espacial a seguinte equação diferencial

$$2\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}p - \frac{kc^2}{a^2} + \Lambda c^2. \quad (3.21)$$

Utilizando (3.19) a reescrevemos como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (3.22)$$

conhecida como equação da aceleração.

3.4.2 Equação do Fluido

Mas para que possamos solucionar a equação de Friedmann precisamos saber como a densidade ρ e a pressão p evoluem com o tempo. Uma das maneira de descobrirmos como estes parâmetros evoluem é através da obtenção da equação do fluido, aplicando a condição de conservação do tensor energia-momento (2.40) ao tensor (3.16). Desta maneira, temos como resultado [17],

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.23)$$

Com intuito de resolver essa nova equação precisamos conhecer as equações de estado dos constituintes do Universo. Faremos a suposição de que estas equações são barotrópicas

$$p = c^2 \omega \rho, \quad (3.24)$$

onde ω é uma constante que especifica o constituinte. Para a radiação, $\omega = 1$; $\omega = 0$ para a matéria diluída e $\omega = -1$, para a energia de vácuo.

Para cada constituinte podemos escrever uma equação de fluido (3.23) afim de obter as seguinte soluções:

(i) Matéria diluída (p_m):

$$\rho_m \propto a^{-3}, \quad (3.25)$$

(ii) Radiação ($p_r = c^2 \rho_r/3$):

$$\rho_r \propto a^{-4}, \quad (3.26)$$

(iii) Energia de vácuo ($p_v = -c^2 \rho_v$):

$$\rho_v = \text{constante}. \quad (3.27)$$

Podemos escrever a equação de Einstein (2.67) da seguinte forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (3.28)$$

Desta maneira, podemos interpretar a constante cosmológica como fonte do campo gravitacional

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\Lambda}), \quad (3.29)$$

onde $T_{\mu\nu}^{\Lambda} = \frac{c^4}{8\pi G}\Lambda g_{\mu\nu}$.

Comparando $T_{\mu\nu}^{\Lambda}$ com o tensor energia-momento de um fluido perfeito, obtemos a evolução temporal de ρ como $\rho_{\Lambda} = -\frac{p_{\Lambda}}{c^2} = \frac{c^2\Lambda}{8\pi G} = \text{constante}$.

No modelo padrão da Cosmologia usa-se $\Lambda = 0$. Desta maneira, as soluções obtidas serão apenas para a matéria e para a radiação. Considerando espaço-tempo plano, ou seja, $k = 0$ na equação (3.19), temos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (3.30)$$

Para a Era dominada pela matéria (cerca de setenta mil anos após o Big Bang), temos como solução

$$a(t) \propto t^{2/3}. \quad (3.31)$$

E para a Era dominada pela radiação (início em $10^{-10}s$ após o surgimento do Universo),

$$a(t) \propto t^{1/2}. \quad (3.32)$$

Quando $t \rightarrow 0$, $a \rightarrow 0$ e, então, $\rho \rightarrow \infty$. Temos a singularidade inicial conhecida como Big Bang.

3.5 Parâmetros Observacionais

3.5.1 Parâmetro de densidade

A equação de Friedmann relaciona a expansão, a taxa de crescimento do fator de escala do Universo, com sua densidade e curvatura

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (3.33)$$

Para um dado valor de H , existe um valor de densidade em que a geometria espacial do Universo é plana ($k = 0$). Este valor é conhecido como densidade crítica ρ_c

$$\rho_c(t) = \frac{3H(t)^2}{8\pi G}. \quad (3.34)$$

A densidade crítica atual é da ordem de $10^{-26} kg m^{-3}$. Se $\rho > \rho_0$, temos um Universo com geometria esférica (fechado), mas se $\rho < \rho_0$, temos um Universo com geometria hiperbólica (aberto).

A densidade crítica é útil para parametrizarmos as medidas de densidade dos constituintes do Universo. O parâmetro de densidade Ω_i é definido como a relação da densidade atual ρ com a densidade crítica ρ_c , [2],

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}. \quad (3.35)$$

Deve-se lembrar que Ω_i é função do tempo, visto que ρ_c tem uma dependência temporal, conforme visto em (3.34). A partir das equações (3.33) e (3.35), escrevemos

$$\Omega_{total} = 1 + \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (3.36)$$

onde Ω_{total} é o parâmetro de densidade relacionado à densidade total do Universo (contribuição da densidade de todos os constituintes). Para um Universo plano, temos $\Omega = 1$, pois $k = 0$.

3.5.2 Parâmetro de desaceleração

O parâmetro de desaceleração quantifica a variação da taxa de expansão do Universo. Para definirmos mais este parâmetro precisamos expandir o fator de escala $a(t)$ em torno do tempo atual t_0 , [2],

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0) (t - t_0) + \frac{1}{2} \ddot{a}(t_0) (t - t_0)^2 + \dots \quad (3.37)$$

Dividindo por $a(t_0)$ temos

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0 (t - t_0) - \frac{q_0}{2} H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots, \quad (3.38)$$

onde q_0 é o parâmetro de desaceleração atual.

Da equação da aceleração (3.22) para $\Lambda = 0$ e $p = 0$ e utilizando (3.35), temos que

$$q_0 = \frac{\Omega_0}{2}. \quad (3.39)$$

Podemos definir uma generalização deste parâmetro como

$$q \equiv -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \quad (3.40)$$

Quanto maior for o parâmetro de desaceleração q_0 , maior é a desaceleração.

Medidas de q_0 foram feitas usando supernovas distantes do tipo Ia. Esses objetos astronômicos são muito usados para este tipo de medida pois apresentam um brilho cuja magnitude absoluta é conhecida. Conhecendo-se esta magnitude e a observada da Terra, conhecida como magnitude relativa, podemos descobrir a distância relativa ao nosso planeta destes objetos através da lei do inverso dos quadrados. Com este resultado é possível analisar o "redshift" correspondente e por fim determinar os parâmetros cosmológicos.

O resultado obtido é que o Universo está sofrendo uma expansão acelerada atualmente, ou seja, $q_0 < 0$ [2].

Através do parâmetro de desaceleração podemos determinar o "redshift" de transição (z_T), momento em que o Universo passou de um período de expansão desacelerada para um de expansão acelerada.

3.5.3 Distância de Luminosidade

A distância de luminosidade relaciona a quantidade de luz recebida de um objeto distante com a distância com que ele aparenta estar levando-se em conta o decréscimo da intensidade luminosa regida pela lei do inverso da distância [28].

Definimos a distância de luminosidade d_L em termos da luminosidade absoluta L (potência total emitida pela fonte) e da luminosidade aparente l (potência observada por unidade de área),

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi l}}. \quad (3.41)$$

Ainda podemos encontrar uma expressão para a distância de luminosidade com base nos parâmetros cosmológicos. A luminosidade aparente de uma fonte em um espaço euclidiano é simplesmente $l = L/4\pi d^2$, onde d é a distância própria. No entanto, temos que levar em conta o "redshift" relativístico e o efeito Doppler sofrido pelos fótons. Cada um destes efeitos contribui com um fator de atenuação $1/a(t) = (1+z)$. Desta maneira, escrevemos a luminosidade aparente l como

$$l = \frac{L}{4\pi d^2 (1+z)^2}. \quad (3.42)$$

Para calcular a distância própria d , utilizamos a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (3.7) para a luz que se propaga radialmente ($d\theta = d\phi = 0$), e para um espaço plano ($k = 0$). Utilizamos também a equação do comprimento da curva em função da métrica

$$d = \int_0^r \sqrt{-g_{rr} dx^r dx^r} = a(t) \int_0^r dr = a(t)r, \quad (3.43)$$

onde r , no limite de integração, é a distância comóvel percorrida pela luz.

Substituindo (3.43) em (3.42) e, posteriormente em (3.41), trocando r por r_0 e $a(t)$ por a_0 , obtemos

$$d_L = a_0 r_0 (1+z). \quad (3.44)$$

Para calcularmos r_0 , utilizamos ainda a métrica de Friedmann-Robertson-Walker sem

componentes angulares para um espaço plano, e consideramos que todos os pontos do espaço-tempo são equivalentes para a luz (propriedade da relatividade restrita), ou seja, $ds = 0$. Portanto,

$$\frac{cdt}{a(t)} = dr. \quad (3.45)$$

Se fizermos a seguinte mudança de variável

$$dt = \frac{dt}{da} \frac{da}{dz} dz = -\frac{1}{\dot{a}(t)} \frac{1}{(1+z)^2} dz = -\frac{a(t)}{H} dz, \quad (3.46)$$

e após integrarmos, obteremos como expressão para r_0 :

$$r_0 = c \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (3.47)$$

Substituindo (3.47) em (3.44), considerando $a_0 = 1$

$$d_L = c(1+z) \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (3.48)$$

Todavia, o que se mede de fato é a diferença entre a magnitude bolométrica aparente m e a magnitude bolométrica M da fonte. Por magnitude bolométrica entende-se como uma grandeza relacionada à energia total emitida por um objeto. Portanto, ela leva em consideração a energia emitida em todas as faixas do espectro, diferentemente da magnitude absoluta que considera apenas a energia emitida nas frequências da faixa do visível. A expressão para a diferença entre as magnitudes bolométricas é a que se segue [29],

$$\mu_0 = m - M = 25 + 5 \log_{10} d_L. \quad (3.49)$$

3.6 Radiação Cósmica de Fundo

Uma observação a favor da teoria do Big Bang foi a detecção da Radiação Cósmica de Fundo em 1965 pelos radioastrônomos Arno Penzias e Robert Wilson [4]. Essa radiação foi prevista em 1948 por George Gamow [30]. Em seu artigo ele explica de maneira

puramente teórica que a radiação cósmica de fundo nada mais é do que a radiação eletromagnética proveniente do Big Bang (surgimento datado em 380 000 anos após o Big Bang), e de como esta poderia ser entendida como um corpo negro emitindo radiação eletromagnética. Na época em que o artigo foi publicado não existiam instrumentos capazes de detectar essa radiação, cuja frequência de pico é de $160,4\text{ GHz}$ (banda rádio do espectro eletromagnético). Desta maneira, toda previsão teórica foi deixada de lado na época.

Em 1963, Robert Dicke [30], aperfeiçoou a teoria de Gamow, chegando à conclusão de que a radiação cósmica de fundo poderia ser detectada em qualquer ponto do Universo. No entanto, apenas Penzias e Wilson receberam o prêmio Nobel em 1978 pela descoberta desta radiação. Em 1992, o satélite COBE foi utilizado para pesquisar mais sobre a radiação cósmica de fundo e suas origens, comparando tal radiação com à emissão de um corpo negro [31].

A radiação cósmica de fundo é detectada aqui na Terra em todas as direções com temperatura de um corpo negro [2].

$$T_0 = 2.725 \pm 0,001\text{ K}. \quad (3.50)$$

Da teoria da distribuição termal do corpo negro temos a densidade total de energia ϵ_{rad} da radiação à temperatura T a expressão que se segue [2],

$$\epsilon_{rad} \equiv \rho_{rad} c^2 = \alpha T^4, \quad (3.51)$$

onde α é a constante do corpo negro. Para a temperatura observada atualmente temos como valor para a densidade de energia da radiação $4.17 \times 10^{-14}\text{ J m}^{-3}$ [2].

Escrevendo $\epsilon_{rad}(t_0)$ em termos da densidade crítica, lembrando que para converter densidade de energia para densidade de massa deve-se dividir por c^2 , o que resulta em

$$\Omega_{rad} = 2.47 \times 10^{-5} h^{-2}, \quad (3.52)$$

onde $h = 0,72 \pm 0,08$ [2].

Portanto, a radiação cósmica de fundo é pequena, mas não pode ser negligenciada, já que é uma fração considerável da densidade crítica.

A densidade referente à radiação evolue com o tempo de acordo com a seguinte expressão

$$\rho_{rad} \propto \frac{1}{a^4}, \quad (3.53)$$

que combinada com (3.51) nos fornece

$$T \propto \frac{1}{a}. \quad (3.54)$$

Portanto, o Universo esfriou a medida que se expandia. Atualmente a temperatura do Universo é de cerca de $3K$, o que significa que no passado sua temperatura era muito alta.

Mas qual é a origem da radiação cósmica de fundo? Sabemos que o átomo de hidrogênio tem uma energia mínima de ionização de $13,6eV$. O Universo era quente o suficiente para que os fótons tivessem facilmente energia suficiente para ionizar completamente os átomos de hidrogênio.

Estima-se que quando o Universo tinha cerca de um milionésimo do tamanho atual, sua temperatura era de $3000000K$ aproximadamente. Temperatura alta o suficiente para que a energia típica de um fóton na distribuição termal fosse maior que a energia de ionização dos átomos de hidrogênio, portanto os átomos não poderiam existir naquela época. Núcleos e elétrons naquele tempo estavam separados, visto que os fótons interagiam fortemente com os elétrons livres (via espalhamento Compton). O livre caminho médio de qualquer fóton era demasiadamente curto. As partículas colidiam frequentemente formando um plasma ionizado [2].

Conforme o Universo se expandia sua temperatura diminuía fazendo com que os fótons perdessem cada vez mais energia e não conseguissem mais ionizar os átomos daquela forma. Em um curto período de tempo, o Universo passou de opaco para completamente transparente. Os fótons foram capazes de viajar livremente pelo Universo. Este processo é conhecido com desacoplamento.

A temperatura era de cerca de $3000K$ no período do desacoplamento (380 mil anos após o Big Bang). Comparando este resultado com a temperatura atual, usando (3.54), chegamos a conclusão de que o Universo tinha cerca de um milionésimo do tamanho presente quando ocorreu o desacoplamento.

3.7 Densidade dos constituintes do Universo

A densidade total de matéria do Universo é quantificada pelo parâmetro de densidade Ω_i . Procuramos não apenas o seu valor, mas como esta densidade é distribuída entre os diferentes constituintes presentes no Universo.

A equação (3.34) descreve a densidade crítica do Universo necessária para que sua geometria seja plana.

3.7.1 Bárions

Bárions são partículas massivas sujeitas à interação forte e com spin $1/2$. Temos como exemplos mais comuns os prótons e os nêutrons. Estes por sua vez, são formados por partículas mais fundamentais, conhecidas como quarks e representam significativamente a matéria bariônica presente no Universo.

No Universo atual, bárions tem sua energia cinética muito menor que sua massa-energia, o que significa que podemos considerá-los como matéria não-relativística. Consideramos também, uma matéria não interagente e que não exerce pressão ($p = 0$), [2]. Aplicando a equação do fluido (3.23) para este caso temos

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0, \quad (3.55)$$

cuja solução é

$$\rho_b = \frac{\rho_b^0}{a^3} = \rho_b^0 (1+z)^3, \quad (3.56)$$

onde ρ_b^0 é a densidade de matéria observada atualmente.

Através da nucleossíntese (estudo da formação de elementos leves), e da observação e do cálculo de uma média aproximada da quantidade de estrelas, de grupo de galáxias e de outros corpos celestes, restringe-se a densidade de matéria bariônica presente no Universo

[2],

$$\Omega_b^0 = \frac{\rho_b^0}{\rho_c^0} = 0,045 \pm 0,003, \quad (3.57)$$

onde ρ_c^0 é a densidade crítica atual.

3.7.2 Radiação

Sabemos que os fótons obedecem a seguinte equação de estado (para $c = 1$)

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r. \quad (3.58)$$

Portanto, a equação do fluido (3.23) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0. \quad (3.59)$$

Como solução desta equação temos

$$\rho_r = \frac{\rho_r^0}{a^4} = \rho_r^0 (1+z)^4, \quad (3.60)$$

onde ρ_r^0 é a densidade de radiação observada atualmente.

O valor para o parâmetro de densidade para a radiação é conhecido e tem como valor atualmente [2],

$$\Omega_r^0 = \frac{\rho_r^0}{\rho_c^0} \simeq 4,76 \times 10^{-5}. \quad (3.61)$$

Convém citar que a radiação não foi incluída no modelo adotado por nós, visto que sua contribuição é muito pequena frente aos outros constituintes (matéria bariônica, matéria escura e energia escura).

3.7.3 Matéria Escura

Matéria escura é uma forma de matéria postulada que só interage gravitacionalmente. Sua existência pode ser inferida a partir de efeitos gravitacionais sobre a matéria observada (estrelas e galáxias). Através de uma análise meticulosa do movimento de alguns destes objetos astronômicos evidenciou-se que matéria bariônica não poderia ser a única responsável por estes efeitos [2].

A partir da detecção de raios-X vindos de aglomerados de galáxias, dos dados da radiação cósmica de fundo e das análises dos efeitos de lentes gravitacionais pode-se obter valores mais precisos para a densidade de matéria total do Universo. Descontando o valor conhecido da matéria bariônica, temos para a densidade de matéria escura o seguinte valor [2],

$$\Omega_{dm}^0 = \frac{\rho_{dm}^0}{\rho_c^0} = 0,23 \pm 0,03. \quad (3.62)$$

Se considerarmos matéria escura fria, isto é, não relativística, sem pressão e não interagente, a equação de evolução da sua densidade será a mesma da matéria bariônica (3.55). Portanto

$$\dot{\rho}_{dm} + 3H\rho_{dm} = 0, \quad (3.63)$$

cuja solução é

$$\rho_{dm} = \frac{\rho_{dm}^0}{a^3} = \rho_{dm}^0 (1+z)^3. \quad (3.64)$$

Existem também, modelos que consideram interações entre a matéria escura e outros constituintes do Universo.

3.7.4 Energia Escura

Energia escura é uma forma hipotética de energia que estaria distribuída por todo espaço e que tende a expandir o Universo. Dados experimentais comprovam sua expansão acelerada, no entanto os constituintes conhecidos, e até mesmo a matéria escura, não são

capazes de promover esta aceleração. Nasce então, a necessidade de introduzirmos este novo componente no Universo, a energia escura. Uma de suas características é a pressão negativa considerável que possui. O efeito de tal pressão seria semelhante, qualitativamente, a uma força que age em larga escala em oposição à gravidade [24].

É de grande importância a determinação da densidade total do Universo, pois é através deste conhecimento que poderemos determinar sua curvatura. Através da análise das flutuações de temperatura presentes na radiação cósmica de fundo se estabelece o limite para esta densidade [2],

$$\Omega_{tot}^0 = 1,02 \pm 0,02. \quad (3.65)$$

Vemos que este valor é próximo do obtido para $k = 0$ na equação (3.36). Desta maneira, o Universo parece apresentar curvatura nula, o que determina uma geometria espacialmente plana. Somando a contribuição dos constituintes considerados anteriormente (bárions, radiação e matéria escura), obtemos como valor 0,28, muito longe da densidade total. Portanto, pode existir algum componente desconhecido que seria responsável pela parcela faltante.

A natureza da energia escura é um dos grandes desafios da física. Existem diversos modelos fenomenológicos diferentes que tentam explicá-la, contudo os dados observacionais estão longe de determinar qual modelo mais apropriado. Entre as propostas de energia escura estão: a constante cosmológica (que pode ser interpretada tanto como uma modificação de natureza geométrica nas equações de campo de Einstein, quanto como um efeito da energia de vácuo, a qual preenche o Universo de maneira homogênea), e a quintessência (usualmente modelada como campo escalar).

Se levarmos em consideração a proposta da constante cosmológica temos como limite para esta componente o seguinte valor [2],

$$\Omega_{\Lambda}^0 = \frac{\rho_{\Lambda}}{\rho_c^0} = 0,72 \pm 0,03. \quad (3.66)$$

Devemos lembrar que Ω_{Λ} não é constante, visto que ρ_c varia com o tempo. Quem é constante, neste caso, é $\rho_{\Lambda} = \Omega_{\Lambda}\rho_c = \Lambda/8\pi G$.

3.8 Modelos

Nesta seção serão abordados alguns modelos que foram propostos para explicar a evolução do Universo.

3.8.1 Modelo da constante cosmológica

Com as equações apresentadas até aqui conseguimos descrever o Universo até aproximadamente $10^{-34}s$ de vida, mas o modelo enfrenta problemas. Na tentativa de solucioná-los, Alan Guth propôs em 1981 o modelo inflacionário [32], um período muito curto em que o Universo se expandiu rapidamente [33]. Este processo se iniciou logo após a era de Planck, ou seja, $t > t_p \simeq \hbar/m_p c^2$, ($\hbar \simeq 6.582110^{-16} eV.s$, é a constante de Planck reduzida, $t_p \simeq 5,39 \times 10^{-44} s$, o tempo de Planck e $m_p \simeq 1.220910^{19} GeV/c^2$, a massa de Planck). A partir deste período a relatividade geral passa a ser válida. Estima-se que esta era durou cerca de $10^{-34}s$ [2].

Da equação de Friedmann (3.19) observamos que se $a(t)$ sofre grandes acréscimos (conforme o Universo se expande, o fator de escala aumenta), a curvatura k e a densidade ρ sofrem uma rápida diluição, visto que o volume do Universo aumenta por consequência desta expansão. Para $c = 1$, a equação torna-se

$$H^2 = \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.67)$$

e tem como solução

$$a(t) = \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right). \quad (3.68)$$

Pode-se observar através desta equação que quando o Universo está sujeito à constante cosmológica, sua taxa de expansão é alta. Essa solução é conhecida como solução de *De Sitter*.

Especula-se que a energia da constante cosmológica tenha se convertido em matéria, e que esta por sua vez, causaria uma expansão desacelerada, chegando ao fim do período inflacionário e iniciando o período descrito pelo modelo padrão.

3.8.2 Modelo Λ CDM

O modelo Λ CDM (constante cosmológica com matéria escura fria - *cold dark matter*) é o mais simples e aceito para explicar a evolução do Universo. Este modelo está em concordância com a teoria do Big Bang que explica as observações feitas sobre a radiação cósmica de fundo, assim como as estruturas em grande escala do Universo e as observações realizadas sobre as supernovas. Este modelo supõe que o Universo é plano ($k = 0$), e que pode ser descrito por um fluido formado pelos seguintes constituintes: matéria bariônica, radiação, matéria escura e constante cosmológica. Portanto, a densidade e pressão totais são

$$\rho_c \simeq \rho = \rho_b + \rho_r + \rho_{dm} + \rho_\Lambda, \quad (3.69)$$

onde ρ_b , ρ_r , ρ_{dm} e ρ_Λ , são as densidades de energia dos bárions, da radiação, da matéria escura e da constante cosmológica, respectivamente;

$$p = p_b + p_r + p_{dm} + p_\Lambda = p_r + p_\Lambda = \frac{\rho_r}{3} - \rho_\Lambda, \quad (3.70)$$

onde p_b , p_r , p_{dm} e p_Λ , representam a pressão da matéria bariônica, da radiação, da matéria escura e da constante cosmológica, respectivamente. Vale lembrar que a pressão da matéria bariônica é nula, $p_\Lambda = \rho_\Lambda$, e da equação (3.58).

Apenas duas equações são necessárias para descrever este modelo. No entanto, temos as equações de Friedmann, da aceleração e a do fluido, sendo que cada um dos quatro constituintes obedece independentemente esta última equação, já que nenhum deles interagem entre si. Isto torna possível encontrarmos soluções para este modelo.

3.8.3 Os problemas da constante cosmológica

O modelo Λ CDM apresenta problemas graves apesar de concordar com os dados observacionais presentes. Um destes grandes problemas está relacionado com o valor da constante cosmológica. Podemos encontrar um valor para ela através de (3.35), (3.34) e

(3.66) [2],

$$\rho_{\Lambda}^0 \simeq 10^{-26} \frac{kg}{m^3}. \quad (3.71)$$

Portanto, a razão entre essas densidades de energia é

$$\frac{\rho_{\Lambda}^{vacuo}}{\rho_{\Lambda}^0} \simeq 10^{121}. \quad (3.72)$$

Como a constante cosmológica é função apenas de sua densidade de energia ρ_{Λ} , constatamos que esta diferença entre o valor medido atualmente e o valor estimado para a época da inflação trata-se de um grave problema, já que os valores diferem em mais de 120 ordens de grandeza.

Outro problema conhecido deste modelo é o da coincidência. Sabemos que as densidades de energia da constante cosmológica, da matéria e da radiação evoluem de forma diferente em relação ao fator de escala. A dificuldade deste modelo vem do fato de que a transição de um Universo dominado pela matéria para um dominado pela constante cosmológica ocorre num "redshift" $z \simeq 0,5$, valor pequeno para a idade do Universo [28].

3.8.4 Modelos com inflaton

Modelos inflacionários utilizam-se de campos escalares acoplados ao campo gravitacional na tentativa de descrever o Universo. O campo escalar responde pela inflação e costuma ser chamado de inflaton. A ação que descreve um modelo típico como este é a que se segue

$$S = \int \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R + \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - V(\phi) \right] d^4 x, \quad (3.73)$$

onde ϕ é o campo escalar e $V(\phi)$ é o seu potencial de auto-interação. Esta ação é a soma da ação do campo gravitacional com a ação do campo escalar.

Variando a ação (3.73) em relação a $g_{\mu\nu}$ e utilizando o princípio variacional, encon-

tramos o tensor energia-momento para o campo escalar ϕ ,

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi - V(\phi) \right). \quad (3.74)$$

E suas componentes escritas na métrica de Friedmann-Robertson-Walker, para um fluido perfeito são a densidade de energia do campo escalar e sua pressão, respectivamente

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.75)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.76)$$

Fazendo uso da condição de conservação do tensor energia-momento (2.40), chegamos a equação de fluido para o campo escalar

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = 0. \quad (3.77)$$

Variando a ação (3.73) com respeito a ϕ encontramos a equação de evolução temporal do campo escalar, comumente conhecida como equação de Klein-Gordon,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (3.78)$$

Esta mesma equação pode ser obtida através da substituição de (3.75) e (3.76) em (3.77).

As equações de Friedmman e da aceleração para este modelo são

$$H^2 = \frac{\rho_\phi}{3}, \quad (3.79)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -p_\phi. \quad (3.80)$$

Para que o Universo se expanda se forma acelerada, a pressão deve ser negativa, portanto $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$. O potencial deve variar de forma lenta no período de expansão acelerada, visto que com esta condição ele tem seu valor máximo. Portanto, consideramos o potencial como uma constante. Essa aproximação é conhecida como *slow-roll*.

Neste regime, $\dot{\phi} \simeq \text{constante}$ e $\ddot{\phi} \simeq 0$, de tal forma que reescrevemos a equação de Klein-Gordon (3.78) como

$$3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (3.81)$$

e com V constante, reescrevemos a equação (3.79), através de (3.75), como

$$H^2 \simeq \frac{V_0}{3}, \quad (3.82)$$

onde V_0 é constante.

Encontramos como solução

$$a(t) = a_0 \exp \sqrt{\frac{V_0}{3}} t. \quad (3.83)$$

3.8.5 Acoplamento ao Campo Gravitacional

Existem dois tipos de acoplamento de um campo ao campo gravitacional: mínimo ou não-mínimo. Acoplamento mínimo ocorre quando o campo não está acoplado ao escalar de curvatura R , e o não-mínimo quando este está acoplado ao escalar de curvatura.

Para um acoplamento não-mínimo temos como exemplo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} F(\phi) R + \mathcal{L}_\phi, \quad (3.84)$$

onde ϕ é o campo escalar, \mathcal{L}_ϕ é a lagrangiana que o descreve e $F(\phi)$ é uma função que descreve o acoplamento não-mínimo entre este e o campo gravitacional.

Este tipo de acoplamento torna a "constante gravitacional" variável no tempo, o que gera uma teoria da relatividade geral modificada [28]. Isto pode ser constatado através de

$$\frac{c^3}{16\pi G} F[\phi(t)] R \equiv \frac{c^3}{16\pi \bar{G}} R, \quad (3.85)$$

onde

$$\bar{G} = \frac{G}{F[\phi(t)]} = \bar{G}(t). \quad (3.86)$$

Este tipo de teoria pode ser entendida como uma generalização da teoria da relatividade geral. Quando a função que descreve o acoplamento é uma constante recuperamos a teoria proposta por Einstein.

3.8.6 Energia escura representada por um campo escalar

Um modelo alternativo ao Λ CDM é o que considera a energia escura como um campo escalar com uma pressão negativa associada a este. Este campo que promove este regime de aceleração é conhecido como *quintessência*. A ação que descreve o modelo é a que se segue

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \right] + S_r + S_m, \quad (3.87)$$

que é a mesma que descreve a inflação.

A energia escura mesmo que descrita por um campo escalar continua sendo um problema em aberto, pois o potencial $V(\phi)$ é arbitrário, precisando, portanto, ser cuidadosamente ajustado.

Além destes modelos mencionados brevemente, existem diversos outros que tentam descrever o Universo. Nos capítulos posteriores será desenvolvido em detalhes, um modelo que faz uso de um acoplamento não-mínimo ao campo escalar (energia escura).

Neste capítulo foram apresentados os objetivos da cosmologia como área de estudo da ciência, assim como sua fundamentação teórica. O Princípio Cosmológico e a Lei de Hubble foram explorados. Definimos a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (F-R-W), e mostramos como a teoria da Relatividade Geral pode ser aplicada para esta métrica. A partir disto, encontramos as formas para os tensores de Ricci e energia-momento, e escalar de Ricci para a tal métrica. As equações do modelo padrão foram apresentadas, as equações de Friedmann, da aceleração e do fluido. Parâmetros observacionais como, de densidade, de aceleração e distância de luminosidade foram discutidos brevemente. A

radiação cósmica de fundo teve seu espaço neste capítulo. Sua previsão, detecção e importância para o entendimento de muitas observações cosmológicas foram exibidas, mesmo que brevemente. Apresentamos também, os principais constituintes do Universo, os bárions, a radiação, a matéria escura e energia escura. Finalmente, modelos cosmológicos mais conhecidos foram abordados de forma sucintas, com o intuito de introduzir o leitor a este assunto e aos problemas relacionados a estes modelos. No próximo capítulo discutiremos o formalismo métrico e o formalismo de Palatini que são cruciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Capítulo 4

O modelo e o formalismo de Palatini

Os campos escalares desempenham um papel fundamental em diversos fenômenos físicos. Apesar de não terem sido observados até então, são uma ferramenta versátil da cosmologia moderna, parte indispensável de uma estrutura teórica. Podem ser motivados pela física de partículas, gerar inflação, ser responsáveis por transições de fase no Universo primordial, se comportarem como matéria escura ou energia escura (quintessência), ou mesmo como ambas (quartessência) [34]. No modelo que será apresentado neste capítulo, ele atua como fonte de energia escura no Universo. Utilizaremos o formalismo de Palatini para analisarmos a dinâmica deste campo. O aspecto mais fundamental a ser observado neste formalismo é a independência, *a priori*, entre a conexão afim e o tensor métrico, sendo estes, de fato, variáveis geométricas independentes.

4.1 O Formalismo de Palatini

Uma conexão afim, cujas componentes podem ser simbolizadas por $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$, governa o transporte paralelo de campos tensoriais ao longo de uma dada curva no espaço-tempo [14]. O espaço-tempo é estruturado pela noção de distância se for dotado por um tensor métrico $g_{\mu\nu}$. As componentes da conexão e o tensor métrico são quantidades fundamentalmente independentes. Eles não exibem nenhuma relação conhecida *a priori*, e se houver alguma relação, elas devem derivar de um vínculo adicional ou de uma dinâmica da geometria [35], [36].

O tensor métrico não é capaz de informar se o espaço é curvo globalmente, apenas localmente. Portanto, em um referencial em queda livre, por exemplo, podemos cometer o erro de dizer que o espaço é plano, medindo localmente a distância entre dois pontos neste referencial. Isto não é verdade, já que o movimento em queda livre é explicado pela presença de um campo gravitacional, que por sua vez, é explicado pela curvatura do espaço-tempo. Concluimos assim, que o tensor métrico não é invariante sob uma transformação de coordenadas. Por sua vez, as derivadas da conexão afim são capazes de determinar, em qualquer referencial, se o espaço é plano ou curvo. Desta maneira, concluimos que, naturalmente, o tensor métrico e a conexão afim são variáveis dinâmicas independentes.

Em uma teoria mais geral que a Relatividade Geral, através do princípio da ação mínima, é possível verificar se a conexão afim é dependente ou não do tensor métrico. Coincidentemente, na Relatividade Geral, a conexão afim é dada em termos do tensor métrico, o que nos leva ao conhecido símbolo de Christoffel.

No capítulo anterior, mostramos que as equações de campo de Einstein podem ser derivadas a partir da variação da ação de Einstein-Hilbert com relação à métrica. Podem também, ser obtidas através do formalismo de Palatini, isto é, uma variação independente com relação à métrica e uma com a conexão independente [37]. A ação é formalmente a mesma, mas agora o novo tensor de Riemann e de Ricci são construídos com a conexão afim independente.

Portanto, o formalismo de Palatini é baseado na ideia de tratarmos a métrica e a conexão separadamente como variáveis dinâmicas independentes na Lagrangiana de Einstein [14]. Para introduzirmos este formalismo, usaremos como exemplo \mathcal{L}_G , um funcional de $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$, da conexão simétrica $\tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu$ e de suas derivadas [38], isto é

$$\mathcal{L}_G = \mathcal{L}_G \left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}, \tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu, \partial_\alpha \tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu \right), \quad (4.1)$$

onde

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \left(\tilde{\Gamma}_{\mu\nu,\lambda}^\lambda - \partial_\nu \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\alpha + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \tilde{\Gamma}_{\lambda\alpha}^\alpha - \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\alpha \tilde{\Gamma}_{\nu\alpha}^\lambda \right), \quad (4.2)$$

observando que $\tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu$ denota uma conexão afim independente da métrica.

Desta maneira, o tensor de Ricci depende apenas de $\tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu$ e de suas derivadas somente, passamos então, a representá-lo como $\tilde{R}_{\mu\nu}$. Portanto, se variarmos apenas com respeito a $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$,

$$\delta S = \int d^4x \delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) \tilde{R}_{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

obtemos, através do princípio da ação mínima, as equações de Einstein no vácuo, $\tilde{R}_{\mu\nu} = 0$.

Variando com respeito à conexão $\tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu$, temos

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \tilde{R}_{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\lambda (\delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda) - g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\nu (\tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda) \right],$$

onde $\tilde{\nabla}$ é a derivada covariante relacionada à conexão afim generalizada.

Integrando por partes e observando que os termos nos colchetes são densidades vectoriais de peso +1, como visto no capítulo anterior, na seção que trata sobre a ação de Einstein-Hilbert, podemos trocar suas derivadas covariantes por derivadas ordinárias fazendo uso das propriedades destas densidades tensoriais [14]. Desta maneira, é possível utilizarmos o teorema da divergência. Sendo assim, obtemos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dS \left[\partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \right] \\ &= \int dS \left\{ \left[\delta_\lambda^\nu \partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\mu\alpha}) - \partial_\lambda (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \right] \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \right\}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Se $\delta S = 0$ para volumes arbitrários, o integrando também deve ser nulo, isto é,

$$\left[\delta_\lambda^\nu \partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\mu\alpha}) - \partial_\lambda (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \right] \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = 0. \quad (4.5)$$

Somente a parte simétrica da expressão no colchetes é nula, pois a conexão afim $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ é simétrica em μ e ν , e sua variação $\delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ é arbitrária. Desta maneira, temos

$$\frac{1}{2} \delta_\lambda^\nu \partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\mu\alpha}) + \frac{1}{2} \delta_\lambda^\mu \partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\nu\alpha}) - \partial_\lambda (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0. \quad (4.6)$$

Manipulando essa equação podemos mostrar que as derivadas covariantes de $\sqrt{-g}$, $g^{\mu\nu}$ e

$g_{\mu\nu}$ são nulas. Se $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$, temos que $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ é a conexão da métrica

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(\partial_\lambda g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\lambda\alpha} - \partial_\alpha g_{\nu\lambda}) \quad (4.7)$$

Portanto, o formalismo de Palatini parte da Lagrangiana de Einstein considerando-a como um funcional da métrica, de uma conexão simétrica arbitrária e de suas derivadas [39]. A variação com respeito ao tensor métrico produz as equações de campo no vácuo da Relatividade Geral e a variação com respeito à conexão revela a equação dinâmica responsável por este novo campo $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ [40], [41].

4.2 O modelo

A partir desta seção, nossas contribuições na análise de um Universo composto por um campo de energia escura não-minimamente acoplado à gravidade e por campos de matéria escura e bariônica, serão apresentadas.

O modelo proposto neste trabalho tem como ação, a expressão que se segue

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[F(\phi)\tilde{R} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) + \mathcal{L}_m \right], \quad (4.8)$$

onde o campo escalar ϕ representa a energia escura, $V(\phi)$ o potencial deste campo, $F(\phi)$ a função de acoplamento não-mínimo entre o campo escalar e à geometria do espaço-tempo [42], \tilde{R} , o escalar de Ricci generalizado e \mathcal{L}_m a Lagrangiana dos campos de matéria, compreendidos, neste caso, pelas matérias ordinária e escura [43], [44], [45].

O campo escalar, em questão, é responsável pela interação entre os campos de matéria e o campo gravitacional. É ele quem intermedeia a interação estes campos. Desta maneira, ele pode ser visto como um grau de liberdade a mais na gravitação. Esta interação entre os campos de matéria e o campo gravitacional explica a variação da "constante"gravitacional. Quando a energia de interação entre os corpos diminui, por exemplo, a "constante"gravitacional também diminui, já que ela está relacionada à energia potencial gravitacional. Desta maneira, a energia do campo escalar aumenta (neste caso, observa-se a transferência de energia dos campos de matéria para o gravitacional), o que justifica a esperada conservação de energia.

Feitas estas considerações, variamos, primeiramente, o setor responsável pelas fontes do campo gravitacional

$$\delta (S_\phi + S_m) = \delta \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) + \mathcal{L}_m \right]. \quad (4.9)$$

Logo, encontramos como solução

$$\begin{aligned} \delta (S_\phi + S_m) &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi + V(\phi) \right) + \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right. \\ &\quad \left. - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g_{\mu\nu}} \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Reescrevemos este resultado da seguinte maneira

$$\delta (S_\phi + S_m) = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} [T_{\mu\nu}^{(\phi)} + T_{\mu\nu}^{(m)}], \quad (4.11)$$

onde identificamos os tensores energia-momento para cada constituinte [37] e [43],

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \left[\frac{1}{2} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi - V(\phi) \right] g_{\mu\nu}, \quad (4.12)$$

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g_{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m. \quad (4.13)$$

Agora, variamos o setor gravitacional da ação do modelo

$$\delta S_g = \delta \int d^4x \sqrt{-g} F(\phi) \tilde{R}, \quad (4.14)$$

e obtemos

$$\delta S_g = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[2 F(\phi) \left(\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{R} \right) \right] + \int d^4x \sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu} \delta \tilde{R}_{\mu\nu}. \quad (4.15)$$

Por fim, respeitando o princípio da ação mínima, encontramos como resultado para os

dois setores, o de matéria e o gravitacional, a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[T_{\mu\nu}^{(\phi)} + T_{\mu\nu}^{(m)} + 2F(\phi) \left(\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{R} \right) \right] \\ &+ \int d^4x \sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu} \delta \tilde{R}_{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

A primeira integral envolve a variação de $g_{\mu\nu}$ e a segunda envolve a variação de $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$, então cada uma delas deve se anular separadamente para que $\delta S = 0$, uma vez que $\delta g_{\mu\nu}$ e $\delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ são arbitrários. Então, de (4.16) obtemos as equações de campo de Einstein

$$2F \left(\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{R} \right) = -T_{\mu\nu}, \quad (4.17)$$

onde,

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\phi)} + T_{\mu\nu}^{(m)}, \quad (4.18)$$

obtidos anteriormente em (4.12) e (4.13). E obtemos também,

$$\int d^4x \sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu} \delta \tilde{R}_{\mu\nu} = 0. \quad (4.19)$$

Para encontrarmos a solução desta expressão acima, partimos do tensor de Ricci generalizado [43]

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = \partial_\nu \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda + \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\theta \tilde{\Gamma}_{\nu\theta}^\lambda - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\theta \tilde{\Gamma}_{\lambda\theta}^\lambda. \quad (4.20)$$

A partir disto podemos avaliar a integral (4.19). Fazendo a variação do Tensor de Ricci (4.20) temos

$$\delta \tilde{R}_{\mu\nu} = \frac{\partial \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\lambda} + \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\eta \tilde{\Gamma}_{\nu\eta}^\lambda + \delta \tilde{\Gamma}_{\nu\eta}^\lambda \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\eta - \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\eta \tilde{\Gamma}_{\lambda\eta}^\lambda - \delta \tilde{\Gamma}_{\lambda\eta}^\lambda \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\eta, \quad (4.21)$$

usando o fato de que

$$\tilde{\nabla}_\nu \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda = \partial_\nu \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda - \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^\eta \delta \tilde{\Gamma}_{\eta\lambda}^\lambda, \quad (4.22)$$

que pode ser reescrito como

$$\tilde{\nabla}_\lambda \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \partial_\lambda \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda - \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^\eta \delta \tilde{\Gamma}_{\eta\nu}^\lambda - \tilde{\Gamma}_{\lambda\nu}^\eta \delta \tilde{\Gamma}_{\eta\mu}^\lambda + \tilde{\Gamma}_{\lambda\eta}^\lambda \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\eta, \quad (4.23)$$

encontramos a conhecida equação de Palatini [14],[37] e [43]

$$\delta \tilde{R}_{\mu\nu} = \tilde{\nabla}_\nu (\delta \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda) - \tilde{\nabla}_\lambda (\delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda). \quad (4.24)$$

Substituindo este resultado em (4.19) obtemos

$$\int d^4x \sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu} \delta \tilde{R}_{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu} [\tilde{\nabla}_\nu (\delta \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda) - \tilde{\nabla}_\lambda (\delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda)]. \quad (4.25)$$

Observando que

$$\tilde{\nabla}_\nu (\sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu} \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda) = \tilde{\nabla}_\nu (\sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu}) \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda + \sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\nu (\delta \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda).$$

O mesmo é feito para o termo em que possui derivada covariante $\tilde{\nabla}_\lambda$.

E substituindo este resultado em (4.25) temos

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu} \delta \tilde{R}_{\mu\nu} &= \int d^4x [\tilde{\nabla}_\nu (\sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu} \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda) - \tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu} \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda) \\ &\quad - \tilde{\nabla}_\nu (\sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu}) \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda + \tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu}) \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Assim como foi visto na seção anterior, os termos nos parênteses, na primeira linha, são densidades vetoriais de peso +1. Portanto podemos trocar suas derivadas covariantes por derivadas ordinárias [14], sendo possível utilizarmos o teorema da divergência. Desta maneira, obtemos

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu} \delta \tilde{R}_{\mu\nu} &= \int d^4x [\tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu}) \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda - \tilde{\nabla}_\nu (\sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu}) \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda] \\ &\quad + \int dS [\sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu} \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda - \sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu} \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda] \end{aligned} \quad (4.27)$$

O segundo termo da equação pode ser desconsiderado, já que os campos na superfície se

anulam. Portanto,

$$\int d^4x \sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu} \delta \tilde{R}_{\mu\nu} = \int d^4x \left[\tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu}) \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda - \tilde{\nabla}_\nu (\sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu}) \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda \right]. \quad (4.28)$$

Para colocarmos o termo $\delta \tilde{\Gamma}_\mu^{\lambda\alpha}$ em evidência na expressão acima, temos que usar o artifício de subida de índice através do uso do tensor métrico. Desta forma encontramos a seguinte expressão

$$\int d^4x \sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu} \delta \tilde{R}_{\mu\nu} = \int d^4x \left[g_{\alpha\nu} \tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu}) - g_{\alpha\lambda} \tilde{\nabla}_\nu (\sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu}) \right] \delta \Gamma_\mu^{\lambda\alpha}. \quad (4.29)$$

Lembrando que (4.29) é o desenvolvimento de (4.19), temos que

$$g_{\alpha\nu} \tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu}) - g_{\alpha\lambda} \tilde{\nabla}_\nu (\sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu}) = 0, \quad (4.30)$$

como encontrado em (4.6).

Multiplicando esta equação por $g^{\alpha\nu}$ e usando o fato que $g^{\alpha\nu} g_{\alpha\nu}$ representa o traço da matriz do tensor métrico, encontramos a equação responsável pela dinâmica dos campos $\tilde{\Gamma}_\mu^{\lambda\alpha}$, [41], [39] e [38]

$$\tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} F(\phi) g^{\mu\nu}) = 0 \quad (4.31)$$

4.2.1 Determinação da conexão afim generalizada $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$

Definimos uma métrica auxiliar $h_{\mu\nu}$ como

$$h_{\mu\nu} = F g_{\mu\nu}, \quad (4.32)$$

com o objetivo de encontramos uma expressão para a conexão afim generalizada em função do acoplamento não-mínimo do campo escalar com a gravidade, do tensor métrico e do símbolo de Christoffel. Trata-se apenas de um truque matemático com o objetivo de encontramos uma forma para a equação dinâmica dos campos da conexão afim, cuja

solução já seja conhecida [46].

Temos com inversa da métrica $h_{\mu\nu}$

$$h^{\mu\nu} = \frac{1}{F} g^{\mu\nu}, \quad (4.33)$$

e como determinante

$$h = F^4 g. \quad (4.34)$$

Portanto,

$$\sqrt{-g} = \frac{1}{F^2} \sqrt{-h}. \quad (4.35)$$

Substituindo em (4.31) obtemos

$$\tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-h} h^{\mu\nu}) = 0. \quad (4.36)$$

Se (4.36) é satisfeita, significa que a solução é a conexão afim para a métrica auxiliar

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma = \frac{h^{\lambda\sigma}}{2} [\partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial_\nu h_{\mu\lambda} - \partial_\lambda h_{\nu\mu}], \quad (4.37)$$

assim como foi feito em (4.7).

Fazendo a substituição $h_{\mu\nu} = F g_{\mu\nu}$, obtemos a nova conexão afim

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} [g_{\lambda\nu} \partial_\mu F + g_{\mu\lambda} \partial_\nu F - g_{\mu\nu} \partial_\lambda F], \quad (4.38)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ é o símbolo de Christoffel.

4.2.2 Tensor de Ricci generalizado

Reescrevemos (4.38) como

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda, \quad (4.39)$$

onde

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} [g_{\lambda\nu}\partial_{\mu}F + g_{\mu\lambda}\partial_{\nu}F - g_{\mu\nu}\partial_{\lambda}F]. \quad (4.40)$$

E substituindo (4.39) no novo tensor de Ricci obtido em (4.20), temos

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + \partial_{\nu}\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\lambda} - \partial_{\lambda}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\theta}\bar{\Gamma}_{\nu\theta}^{\lambda} + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\theta}\Gamma_{\nu\theta}^{\lambda} + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\theta}\bar{\Gamma}_{\nu\theta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\theta}\bar{\Gamma}_{\lambda\theta}^{\lambda} \\ &\quad - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\theta}\Gamma_{\lambda\theta}^{\lambda} - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\theta}\bar{\Gamma}_{\lambda\theta}^{\lambda}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci usual do símbolo de Christoffel.

Observando a troca de índices, calculamos agora a derivada covariante de $\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\lambda}$ e $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$, respectivamente

$$\nabla_{\nu}\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\lambda} = \partial_{\nu}\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\theta}^{\lambda}\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\theta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\theta}\bar{\Gamma}_{\theta\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\theta}\bar{\Gamma}_{\theta\mu}^{\lambda} = \partial_{\nu}\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\theta}\bar{\Gamma}_{\theta\lambda}^{\lambda}, \quad (4.42)$$

$$\nabla_{\lambda}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \partial_{\lambda}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\theta}^{\lambda}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\theta} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\theta}\bar{\Gamma}_{\theta\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\theta}\bar{\Gamma}_{\theta\mu}^{\lambda}. \quad (4.43)$$

Por substituição de (4.42) e (4.43) em (4.41), obtemos

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \nabla_{\nu}\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\lambda} - \nabla_{\lambda}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} - \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\theta}\bar{\Gamma}_{\nu\theta}^{\lambda} - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\theta}\bar{\Gamma}_{\lambda\theta}^{\lambda}. \quad (4.44)$$

Usando (4.42), obtemos como resultado para o cálculo das derivadas covariantes da expressão acima, as seguintes expressões

$$\nabla_{\nu}\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\lambda} = \frac{2}{F}\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}F - \frac{2}{F^2}\partial_{\mu}F\partial_{\nu}F, \quad (4.45)$$

$$\nabla_{\lambda}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{F}\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}F - \frac{1}{F^2}\partial_{\mu}F\partial_{\nu}F + \frac{1}{2F^2}g_{\mu\nu}\nabla_{\sigma}F\nabla^{\sigma}F - \frac{1}{2F}g_{\mu\nu}\nabla_{\sigma}\nabla^{\sigma}F. \quad (4.46)$$

Utilizando ainda (4.42), calculamos os outros termos de (4.44)

$$\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\theta}\bar{\Gamma}_{\nu\theta}^{\lambda} = \frac{3}{2F^2}\partial_{\mu}F\partial_{\nu}F - \frac{1}{2F^2}g_{\mu\nu}\nabla_{\theta}F\nabla^{\theta}F, \quad (4.47)$$

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\theta}\bar{\Gamma}_{\theta\lambda}^{\lambda} = \frac{2}{F^2}\partial_{\mu}F\partial_{\nu}F - \frac{1}{F^2}g_{\mu\nu}\nabla_{\theta}F\nabla^{\theta}F. \quad (4.48)$$

Substituindo (4.45), (4.46), (4.47) e (4.48) em (4.44) chegamos ao tensor de Ricci generalizado

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{F}\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}F - \frac{3}{2F^2}\partial_{\mu}F\partial_{\nu}F + \frac{1}{2F}g_{\mu\nu}\nabla_{\sigma}\nabla^{\sigma}F, \quad (4.49)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci usual.

4.2.3 Definição do Tensor Energia-Momento Efetivo

Reescrevemos (4.49) como

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \bar{R}_{\mu\nu}, \quad (4.50)$$

onde

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{F}\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}F - \frac{3}{2F^2}\partial_{\mu}F\partial_{\nu}F + \frac{1}{2F}g_{\mu\nu}\nabla_{\sigma}\nabla^{\sigma}F. \quad (4.51)$$

Agora, as equações de campo de Einstein podem ser expressas como (4.17). Substituindo (4.50) em (4.17), temos

$$2F\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right) = -T_{\mu\nu} - 2F\bar{R}_{\mu\nu} + F\bar{R}g_{\mu\nu}. \quad (4.52)$$

Através da contração do tensor métrico com o termo de correção do tensor de Ricci generalizado

$$\bar{R} = g^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu}, \quad (4.53)$$

encontramos o termo de correção \bar{R} do escalar de Ricci generalizado

$$\bar{R} = \frac{3}{F}\nabla_{\sigma}\nabla^{\sigma}F - \frac{3}{2F^2}\partial^{\sigma}F\partial_{\sigma}F. \quad (4.54)$$

Substituindo (4.51) e (4.54) em (4.52), chegamos na nova forma das equações de campo de Einstein

$$2F \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = -\mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad (4.55)$$

onde $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento generalizado dado por

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + 2\nabla_\nu \nabla_\mu F - \frac{3}{F} \partial_\mu F \partial_\nu F - 2\nabla_\sigma \nabla^\sigma F g_{\mu\nu} + \frac{3}{2F} \partial^\sigma F \partial_\sigma F g_{\mu\nu}. \quad (4.56)$$

E por sua vez $T_{\mu\nu}$, que foi obtido anteriormente em (4.18), é a soma dos tensores energia-momento dos constituintes considerados pelo modelo.

Neste capítulo exploramos a ideia de campo escalar e apresentamos o formalismo de Palatini [47], [48], e de forma sucinta mostramos algumas diferenças que existem entre este formalismo e o métrico. Introduzimos a ação do modelo descrevendo os constituintes presentes neste. Além disto, definimos tensores energia-momento para cada um destes constituintes. A partir da variação da ação segundo o formalismo de Palatini, as equações de campo de Einstein e da dinâmica responsável pelos campos da conexão afim generalizada foram obtidas. Encontramos o tensor de Ricci generalizado, o tensor energia-momento efetivo e definimos uma nova forma para as equações de campo de Einstein. Estas foram escritas de tal maneira que a parte geométrica permaneceu inalterada. Para que isto pudesse ocorrer, a parte responsável pelas fontes teve que ser reescrita através do tensor energia-momento efetivo citado anteriormente. No próximo capítulo chegaremos nas equações de campo do modelo e construiremos uma Lagrangiana pontual com a métrica de Friedmann-Robertson-Walker que irá descrever uma dinâmica correspondente à ação proposta.

Capítulo 5

As equações de campo e a Lagrangiana pontual

Neste capítulo temos como objetivo apresentar as equações de campo obtidas a partir do modelo analisado através do formalismo de Palatini, a densidade de energia e a pressão do campo escalar em questão, a partir das componentes do tensor-energia momento generalizado, obtido no capítulo anterior. A Lagrangiana pontual que irá descrever uma dinâmica correspondente à ação proposta será construída fazendo uso da métrica de Friedmann-Robertson-Walker. A partir desta reobteremos as mesmas equações de campo: as equações de Friedmann, da aceleração e de Klein-Gordon, utilizando as equações de Euler-Lagrange.

5.1 As componentes do tensor energia-momento para o campo escalar

Nesta seção encontraremos as densidade de energia e a pressão do campo escalar através das componentes do tensor energia-momento generalizado obtido no capítulo anterior.

5.1.1 Componente temporal do Tensor Energia-Momento

Como visto no segundo capítulo, se tomarmos a componente temporal de (4.56)

$$\mathcal{T}_{00} = T_{00} + 2\nabla_0\nabla_0 F - \frac{3}{F}\partial_0 F\partial_0 F - 2\nabla_\sigma\nabla^\sigma F g_{00} + \frac{3}{2F}\partial^\sigma F\partial_\sigma F g_{00}, \quad (5.1)$$

observando que $T_{00} = T_{00}^{(m)} + T_{00}^{(\phi)}$, obteremos a densidade de energia do campo escalar.

Desenvolvendo os cálculos para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker, observando que F é homogêneo, portanto depende apenas de t , ou seja, $F(t)$, chegamos a

$$\mathcal{T}_{00} = \rho_m + \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V - \frac{3}{2F}F'^2\dot{\phi}^2 - 6\frac{\dot{a}}{a}F'\dot{\phi}, \quad (5.2)$$

onde ρ_m é a densidade de energia da matéria.

Como \mathcal{T}_{00} representa a densidade de energia total, se subtrairmos a densidade de energia da matéria da expressão (5.2), obteremos a densidade de energia para o campo escalar

$$\rho_{(\phi)} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V - \frac{3}{2F}F'^2\dot{\phi}^2 - 6HF'\dot{\phi}. \quad (5.3)$$

5.1.2 Componentes espaciais do Tensor Energia-Momento

Agora, tomando uma das componentes espaciais de (4.56)

$$\mathcal{T}_{\underline{ii}} = T_{\underline{ii}} + 2\nabla_{\underline{i}}\nabla_{\underline{i}} F - \frac{3}{F}\partial_{\underline{i}} F\partial_{\underline{i}} F - 2\nabla_\sigma\nabla_\alpha F g_{\underline{ii}} g^{\sigma\alpha} + \frac{3}{2F}\partial_\alpha F\partial_\sigma F g_{\underline{ii}} g^{\sigma\alpha}. \quad (5.4)$$

obteremos a pressão do campo escalar. Observando que os índices sublinhados indicam que eles não estão sendo somados. Neste caso, não se trata da soma da convenção de Einstein.

Fazendo uso de (4.12) temos

$$T_{\underline{ii}}^{(\phi)} = \partial_{\underline{i}}\phi\partial_{\underline{i}}\phi - \left[\frac{1}{2}\partial_\sigma\phi\partial_\alpha\phi g^{\sigma\alpha} - V(\phi) \right] g_{\underline{ii}}. \quad (5.5)$$

Como o campo ϕ é homogêneo, ou seja, depende apenas de t , temos que

$$T_{\underline{ii}}^{(\phi)} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 g_{\underline{ii}} + V g_{\underline{ii}}. \quad (5.6)$$

Substituindo em (5.4) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\underline{ii}} &= -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 g_{\underline{ii}} + V g_{\underline{ii}} + 2 \left[\partial_{\underline{i}} \nabla_{\underline{i}} F - \Gamma_{\underline{ii}}^t \nabla_t F \right] - \frac{3}{F} \partial_{\underline{i}} F \partial_{\underline{i}} F - 2 \nabla_{\sigma} \nabla_{\alpha} F g_{\underline{ii}} g^{\sigma\alpha} \\ &+ \frac{3}{2F} \partial_{\alpha} F \partial_{\sigma} F g_{\underline{ii}} g^{\sigma\alpha} - p_m g_{\underline{ii}}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde p_m é a pressão do campo de matéria.

Lembrando que F também é homogêneo, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\underline{ii}} &= -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 g_{\underline{ii}} + V g_{\underline{ii}} - 2\Gamma_{\underline{ii}}^t \nabla_t F - 2 \left[\partial_{\sigma} \nabla_{\alpha} F - \Gamma_{\alpha\sigma}^{\lambda} \nabla_{\lambda} F \right] g_{\underline{ii}} g^{\sigma\alpha} \\ &+ \frac{3}{2F} \partial_0 F \partial_0 F g_{\underline{ii}} g^{00} - p_m g_{\underline{ii}}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Finalmente

$$\mathcal{T}_{\underline{ii}} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 g_{\underline{ii}} + V g_{\underline{ii}} - 2\Gamma_{\underline{ii}}^t F' \dot{\phi} - 2 \left(F'' \dot{\phi}^2 + F' \ddot{\phi} \right) g_{\underline{ii}} - 6H g_{\underline{ii}} F' \dot{\phi} + \frac{3}{2F} F'^2 \dot{\phi}^2 g_{\underline{ii}} - p_m g_{\underline{ii}}. \quad (5.9)$$

Para a componente $i = 1$ temos

$$\mathcal{T}_{11} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 a^2 - a^2 V - 2a\dot{a}F'\dot{\phi} + 2a^2 \left(F'' \dot{\phi}^2 + F' \ddot{\phi} \right) + 6HF' \dot{\phi} a^2 - \frac{3}{2F} F'^2 \dot{\phi}^2 a^2 + p_m a^2. \quad (5.10)$$

O mesmo vale para todas as outras componentes espaciais. Assim como foi feito anteriormente para encontrarmos a densidade energia do campo escalar, sabemos que \mathcal{T}_{11} é a pressão total, desta maneira, subtraímos $p_m a^2$ da expressão acima para determinarmos uma expressão para a pressão do campo escalar

$$p_{(\phi)} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V + 4HF' \dot{\phi} + 2 \left(F'' \dot{\phi}^2 + F' \ddot{\phi} \right) - \frac{3}{2F} F'^2 \dot{\phi}^2. \quad (5.11)$$

5.2 Equações da Aceleração e de Friedmann

Nesta seção obteremos as equações de Friedmann e da aceleração por meio das componentes das equações de campo de Einstein generalizada mostradas no capítulo anterior.

5.2.1 Equação de Friedmann

Temos como componente temporal da equação de Einstein generalizada (4.55) a seguinte expressão

$$2F \left(R_{00} - \frac{1}{2} R g_{00} \right) = -\mathcal{T}_{00}. \quad (5.12)$$

O tensor e o escalar de Ricci para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker com $c = 1$ e $k = 0$, são apresentados abaixo, respectivamente

$$R_{00} = 3 \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (5.13)$$

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right]. \quad (5.14)$$

Substituindo estes resultados em (5.12), encontramos a equação de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\rho}{6F}, \quad (5.15)$$

onde $\rho = \rho^{(\phi)} + \rho^{(m)}$.

Observando que $\rho^{(\phi)}$ é dado pela expressão (5.3).

5.2.2 Equação da Aceleração

As componentes espaciais da equação de Einstein generalizada (4.55) são

$$2F \left(R_{ii} - \frac{1}{2} R g_{ii} \right) = -\mathcal{T}_{ii}, \quad (5.16)$$

Para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker com $k = 0$ e $c = 1$, temos como componentes do tensor de Ricci as seguintes expressões

$$R_{11} = - (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2), \quad (5.17)$$

$$R_{22} = - (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2), \quad (5.18)$$

$$R_{33} = - (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2). \quad (5.19)$$

Fazendo uso destes resultados e de (5.16), reescrevemos equação de Einstein para uma determinada componente espacial. Neste caso, escolheremos $i = 1$ apenas para exemplificar

$$2F \left[- (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) - 3 \frac{\ddot{a}}{a} g_{11} - 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 g_{11} \right] = -\mathcal{T}_{11}. \quad (5.20)$$

A partir disto, chegamos na seguinte expressão

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{p}{4F} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2. \quad (5.21)$$

Usando a equação de Friedmann (5.15), obtemos a equação da aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho + 3p}{12F}, \quad (5.22)$$

onde $\rho = \rho_{(\phi)} + \rho_m$ e $p = p_{(\phi)} + p_m$.

5.3 A equação de Klein-Gordon

Determinaremos a forma como o campo escalar evolui no tempo através de sua equação de campo, conhecida como equação de Klein-Gordon. Nesta seção apresentaremos duas maneiras diferentes que usamos para obtermos esta equação. Elas serão descritas nas subseções a seguir.

5.3.1 A equação de Klein-Gordon através da equação de Euler-Lagrange generalizada

Considerando a ação proposta em (4.8), e usando as expressões (4.50) e (4.54), temos

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[FR - \frac{3}{2F} \partial_\mu F \partial^\mu F + 3 \nabla_\mu \nabla^\mu F + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V + \mathcal{L}_m \right], \quad (5.23)$$

que pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S = & \int d^4x \sqrt{-g} \left[FR - \frac{3}{2F} F'^2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + 3F'' \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + 3F' \nabla_\mu \nabla^\mu \phi \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V + \mathcal{L}_m \right], \end{aligned} \quad (5.24)$$

pois $F = F(\phi)$. Definimos $F' = \frac{dF}{d\phi}$.

A partir deste resultado obtemos a seguinte densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = FR - \frac{3}{2F} F'^2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + 3F'' \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + 3F' \nabla_\mu \nabla^\mu \phi - V + \rho_m^0, \quad (5.25)$$

definindo ρ_m como densidade de energia para a matéria ordinária e escura e $\rho_m^0 = \frac{\rho_m}{a^3}$ como a densidade de energia atual. Esta última pode ser obtida através de (3.23) para um campo de matéria sem pressão, ou seja, $p_m = 0$.

Usando a equação de Euler-Lagrange para derivadas de segunda ordem (ver apêndice A), [49],

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] + \nabla_\mu \nabla^\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \nabla^\mu \phi)} \right] = 0, \quad (5.26)$$

obtemos a equação de Klein-Gordon para o campo escalar

$$\left(1 - \frac{3F'^2}{F}\right) \nabla_\mu \nabla^\mu \phi + 3 \left(\frac{F'^3}{2F^2} - \frac{F'F''}{F}\right) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - RF' + V' = 0. \quad (5.27)$$

5.3.2 A equação de Klein-Gordon através da variação da ação com respeito ao campo escalar

Partindo da ação (5.24) e chamando $A = 1 - \frac{3F'^2}{F}$ temos

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[FR + \frac{A}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + 3 \nabla_\mu (F' \partial^\mu \phi) - V + \mathcal{L}_m \right]. \quad (5.28)$$

Variando com relação ao campo escalar chegamos a

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ F' R \delta \phi + \frac{A'}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \delta \phi + A \partial_\mu (\delta \phi) \partial^\mu \phi + 3 \nabla_\mu \left[F'' \partial^\mu \phi \delta \phi \right. \right. \\ & \left. \left. + F' \partial^\mu (\delta \phi) \right] - V' \delta \phi \right\}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Usando a regra do produto

$$\nabla_\mu (A \delta \phi \partial^\mu \phi) = A' \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \delta \phi + A \partial_\mu (\delta \phi) \partial^\mu \phi + A \nabla_\mu \nabla^\mu \phi \delta \phi, \quad (5.30)$$

e substituindo em (5.29), obtemos

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4x \sqrt{-g} \left[F' R - \frac{A'}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - A \nabla_\mu \nabla^\mu \phi - V' \right] \delta \phi + \\ & \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu \left[A \partial^\mu \phi \delta \phi + F'' \partial^\mu \phi \delta \phi + F' \partial^\mu (\delta \phi) \right]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Como os termos que estão dentro do colchetes, da segunda integral acima, são grandezas escalares, podemos trocar a derivada covariante ∇_μ pela derivada ordinária ∂_μ , e por

sua vez, usarmos o teorema da divergência de Gauss para obtermos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[F' R - \frac{A'}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - A \nabla_\mu \nabla^\mu \phi - V' \right] \delta \phi + \\ \oint_S dS \sqrt{-g} n_\mu \left[A \partial^\mu \phi \delta \phi + F'' \partial^\mu \phi \delta \phi + F' \partial^\mu (\delta \phi) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Observando que o campo é nulo na superfície, que o campo ϕ e sua derivada $\partial^\mu \phi$ são fixos nos limites de integração, concluímos que a integral de superfície acima é nula. Portanto, sabendo que

$$A' = 3 \frac{F'^3}{F^2} - 6 \frac{F' F''}{F} F'', \quad (5.33)$$

temos

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[F' R - 3 \frac{F'^3}{2F^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + 3 \frac{F' F''}{F} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right. \\ \left. - \left(1 - 3 \frac{F'^2}{F} \right) \nabla_\mu \nabla^\mu \phi - V' \right] \delta \phi = 0. \end{aligned} \quad (5.34)$$

A partir disto obtemos a equação de Klein-Gordon para o campo escalar (5.27). Desta maneira, verificamos que este resultado é consistente.

5.4 A Lagrangiana pontual

Nesta seção construiremos a Lagrangiana pontual a partir da densidade de Lagrangiana derivada da ação (4.8).

Temos a densidade de Lagrangiana como um funcional de infinitos graus de liberdade. Especificando uma métrica, neste caso, que represente um espaço homogêneo e isotrópico, limitamos os graus de liberdade do sistema a um número finito. Para uma métrica de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plana e considerando o campo escalar homogêneo (exigência do princípio cosmológico) [28], temos

$$\tilde{R} = R + \frac{3}{F} \left[F'' \dot{\phi}^2 + F' \ddot{\phi} + 3H F' \dot{\phi} \right] - \frac{3}{2F^2} F'^2 \dot{\phi}^2. \quad (5.35)$$

Assim, a ação (4.8) passa a ser escrita como

$$\begin{aligned}
 S = \int d^3x dt a^3 & \left[6F \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{3}{2F} F'^2 \dot{\phi}^2 + 3 \left(F' \ddot{\phi} + F'' \dot{\phi}^2 + 3HF' \dot{\phi} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V + \rho_m \right], \tag{5.36}
 \end{aligned}$$

pois R é dado por (5.14).

Finalmente, encontramos a Lagrangiana pontual

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = 6F (\ddot{a}a^2 + \dot{a}^2a) - \frac{3}{2F} a^3 F'^2 \dot{\phi}^2 + 3a^3 & \left(F' \ddot{\phi} + F'' \dot{\phi}^2 + 3HF' \dot{\phi} \right) \\
 + \frac{a^3}{2} \dot{\phi}^2 - a^3 V + \rho_m^0. \tag{5.37}
 \end{aligned}$$

5.4.1 Integração por partes em \ddot{a} e $\ddot{\phi}$ da Lagrangiana pontual

É de grande relevância determinarmos a Lagrangiana pontual correspondente à ação do modelo, pois através dela encontraremos as equações de campo aplicadas à métrica, e determinaremos o acoplamento não-mínimo $F(\phi)$ e o potencial do campo escalar $V(\phi)$, fazendo uso do gerador infinitesimal da simetria de Noether, que será visto no próximo capítulo. Desta maneira, é importante também, que esta Lagrangiana pontual seja simples em sua forma, ou seja, que possua derivadas menores do que de segunda ordem, para facilitar os cálculos [28]. No entanto, observamos em (5.37) que derivadas de ordem superior a um, aparecem no fator de escala a e no campo escalar ϕ . Desta maneira, se faz necessário uma integração por partes em \ddot{a} e $\ddot{\phi}$ na Lagrangiana pontual (5.37). Obtemos

assim, a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
S = & \int d^3x dt \left\{ 6 \left[\frac{d}{dt} (F \dot{a} a^2) - F' \dot{a} a^2 \dot{\phi} - 2F a \dot{a}^2 + F \dot{a}^2 a \right] - \frac{3}{2F} a^3 F'^2 \dot{\phi}^2 \right. \\
& + 3 \left[\frac{d}{dt} (F' a^3 \dot{\phi}) - 3a^2 \dot{a} F' \dot{\phi} - a^3 F'' \dot{\phi}^2 + a^3 F'' \dot{\phi}^2 + 3a^2 \dot{a} F' \dot{\phi} \right] \\
& \left. + \frac{a^3}{2} \dot{\phi}^2 - a^3 V + \rho_m^0 \right\}, \tag{5.38}
\end{aligned}$$

que se reduz a

$$S = \int d^3x dt \left[-6F' a \dot{a}^2 - 6F' \dot{a} a^2 \dot{\phi} - \frac{3}{2F} a^3 F'^2 \dot{\phi}^2 + \frac{a^3}{2} \dot{\phi}^2 - a^3 V + \rho_m^0 \right]. \tag{5.39}$$

Observe que os termos $\frac{d}{dt}(F \dot{a} a^2)$ e $\frac{d}{dt}(F' a^3 \dot{\phi})$ em (5.38) se anulam nos extremos, já que os campos são fixos, isto é, não variam nos extremos. Feita esta observação, finalmente, obtemos a Lagrangiana pontual

$$\mathcal{L} = 6F \dot{a}^2 a + 6F' \dot{a} a^2 \dot{\phi} + \frac{3}{2F} a^3 F'^2 \dot{\phi}^2 - \frac{a^3}{2} \dot{\phi}^2 + a^3 V + \rho_m^0. \tag{5.40}$$

Convém citarmos que inicialmente fizemos uma integração por partes na Lagrangiana pontual apenas em \ddot{a} , e que a partir disto encontramos as equações da aceleração e de Klein-Gordon. Isto pode ser verificado no apêndice B. Não prosseguimos os cálculos com essa Lagrangiana, uma vez que seria de grande dificuldade obtermos a equação de Friedmann via função energia, e até mesmo aplicarmos o gerador infinitesimal da simetria de Noether para este caso, já que a Lagrangiana em questão ainda teria derivadas de segunda ordem em ϕ . Desta maneira, teríamos que generalizar tanto a função energia quanto o gerador de simetria para derivadas de ordem superior. Felizmente, verificamos que ambas as Lagrangianas, a integrada por partes em \ddot{a} e $\ddot{\phi}$, e a integrada por partes apenas em \ddot{a} , descrevem a mesma dinâmica. Averiguamos esta correspondência dinâmica entre as Lagrangianas variando a ação tensorial do modelo (5.29), com relação à métrica e ao campo escalar, obtendo suas equações de campo para a métrica, e por fim, comparando estas equações com as encontradas para as duas Lagrangianas pontuais. Verificamos que os resultados foram os mesmo em todos os casos.

5.5 As equações de campo

Nesta seção obteremos as equações da aceleração e de Klein-Gordon via aplicação da equação de Euler-Lagrange na Lagrangiana pontual. Obteremos também, a equação de Friedmann através da função energia.

5.5.1 Equação da aceleração a partir da densidade de Lagrangiana pontual integrada por partes em \ddot{a} e $\ddot{\phi}$

Lembrando da expressão da Lagrangiana pontual (5.40) e usando

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = 0, \quad (5.41)$$

encontramos a seguinte expressão

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{12F} \left[6H^2 F + 12HF' \dot{\phi} + 3 \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V - \frac{3}{2F} F'^2 \dot{\phi}^2 - 2F' \ddot{\phi} - 2F'' \dot{\phi}^2 \right) \right]. \quad (5.42)$$

Identificando a expressão para a densidade de energia do campo escalar (5.3) e para a componente temporal da equação de campo de Einstein, ou seja, a própria equação de Friedmann (5.15), obtemos a equação da aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{(\rho + 3p)}{12F}. \quad (5.43)$$

Note que este resultado foi obtido anteriormente em (5.22).

5.5.2 Função energia: Equação de Friedmann

A partir da Lagrangiana pontual (5.40), e fazendo uso da função energia abaixo

$$E_{\mathcal{L}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} \dot{a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} = 0, \quad (5.44)$$

chegamos na equação de Friedmann

$$H^2 = \frac{\rho}{6F}. \quad (5.45)$$

O mesmo resultado é encontrado em (5.15).

5.5.3 Equação de Klein-Gordon a partir da Lagrangiana pontual integrada por partes em \ddot{a} e $\ddot{\phi}$

Aplicando a seguinte equação de Euler-Lagrange para a Lagrangiana pontual (5.40)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0, \quad (5.46)$$

encontramos a equação de Klein-Gordon para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker

$$\ddot{\phi} \left(1 - \frac{3F'^2}{F} \right) + 3H \left(1 - \frac{3F'^2}{F} \right) \dot{\phi} + 3 \left(\frac{F'^3}{2F^2} - \frac{F'F''}{F} \right) \dot{\phi}^2 - RF' + V' = 0. \quad (5.47)$$

Observe que este resultado é compatível com a equação (5.27) encontrada anteriormente.

Neste capítulo apresentamos a densidade de energia e pressão do campo escalar através das componentes do tensor-energia momento efetivo. Obtivemos as equações de Friedmann e da aceleração via equações de campo de Einstein, e a equação de Klein-Gordon através da variação da ação com respeito ao campo escalar e da aplicação da equação de Euler-Lagrange generalizada. Construímos a Lagrangiana pontual para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker plana e a integramos por partes em \ddot{a} e $\ddot{\phi}$, a fim de diminuirmos as ordens de suas derivadas. A partir deste resultado obtivemos as equações da aceleração e de Klein-Gordon através da equação de Euler-Lagrange, e a equação de Friedmann fazendo uso da função energia. Por fim, observamos que estes resultados obtidos através da Lagrangiana pontual são compatíveis com aqueles obtidos através da variação da ação tensorial com relação ao campo escalar e ao tensor métrico depois de aplicarmos a métrica FRW, indicando que estes resultados são consistentes.

Capítulo 6

Simetria de Noether

Neste capítulo apresentaremos a simetria de Noether e a empregaremos como princípio para restringir o potencial de auto-interação do campo escalar e o acoplamento ao campo gravitacional. Por fim, encontraremos a constante de movimento associada à solução encontrada para estes parâmetros a fim de obtermos uma equação extra para o modelo, facilitando assim, a solução das equações de campo.

6.1 Simetria de Noether

A partir da simetria de Noether determinaremos o potencial e o acoplamento com o campo gravitacional [50]. Primeiramente, devemos lembrar que as constantes de movimento são quantidades físicas do sistema mecânico, descrito pela Lagrangiana \mathcal{L} , que não mudam seus valores durante a evolução do sistema, sendo assim, grandezas conservadas [46].

Na dinâmica Lagrangiana existe uma relação geral entre simetria (invariância sob transformações de coordenadas), e quantidades conservadas. A existência de uma simetria implica em uma quantidade conservada. Consideremos as seguintes transformações pontuais

$$q'_i(\lambda') = q_i(\lambda) + \epsilon \alpha_i(q(\lambda), \lambda), \quad (6.1)$$

$$\lambda' = \lambda + \epsilon \beta(q(\lambda), \lambda), \quad (6.2)$$

onde α_i e β são funções conhecidas de $(n + 1)$ variáveis, funções das n coordenadas generalizadas e do parâmetro λ , e ϵ é um parâmetro infinitesimal arbitrário.

A ação que descreve a dinâmica é invariante sob as transformações consideradas

$$\Delta S = \int_{\lambda'_1}^{\lambda'_2} \mathcal{L} \left(q'_i(\lambda'), \frac{dq_i(\lambda')}{d\lambda'}, \lambda' \right) d\lambda' - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathcal{L} \left(q_i(\lambda), \frac{dq_i(\lambda)}{d\lambda}, \lambda \right) d\lambda = 0. \quad (6.3)$$

Se a condição de invariância é verificada sob a transformação, existe uma quantidade conservada associada a \mathcal{L} . A relação entre simetria e esta quantidade é garantida pelo teorema de Noether.

Se a ação é invariante sob as transformação pontuais para um sistema mecânico com n graus de liberdade, a quantidade

$$\Sigma_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i \beta - \alpha_i) - \mathcal{L} \beta, \quad (6.4)$$

é uma constante de movimento.

Se a Lagrangiana não depende explicitamente de λ , ou seja, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$, sua forma não pode ser afetada sob transformações do parâmetro λ , o que equivale fazermos β constante e $\alpha = 0$ nas transformações (6.1) e (6.2). Desta maneira, através de (6.4), observa-se a conservação de energia

$$\Sigma_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = H, \quad (6.5)$$

onde H , neste caso, representa o Hamiltoniano.

Agora, se a forma da Lagrangiana não é afetada pelas transformações de coordenadas q_i , o que equivale fazermos $\beta = 0$ e α constante, nas transformações (6.1) e (6.2), temos o teorema de Noether associado a $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$

$$\Sigma_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (6.6)$$

que está relacionado, neste caso, com a conservação de momento generalizado, já que este é dado por: $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$.

No caso em questão temos: $q_1 = a(t)$, $q_2 = \phi(t)$, $\dot{q}_1 = \dot{a}(t)$ e $\dot{q}_2 = \dot{\phi}(t)$, caracterizando assim, um problema com dois graus de liberdade.

6.1.1 Condição para a existência da simetria de Noether

Vamos considerar uma transformação pontual que dependa de um parâmetro ϵ , tal que $Q^i = Q^i(\mathbf{q}, \epsilon)$. Para valores infinitesimais de ϵ , a transformação é representada pelo seguinte campo vetorial

$$\mathbf{X} = \alpha^i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\frac{d}{d\lambda} \alpha^i(\mathbf{q}) \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}, \quad (6.7)$$

que é conhecido como gerador infinitesimal de simetria. Os α^i 's são coeficientes do gerador de simetria, os quais são funções apenas das coordenadas generalizadas.

Uma Lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ é invariante sob a transformação \mathbf{X} se

$$L_{\mathbf{X}}\mathcal{L} = \mathbf{X}\mathcal{L} = \alpha^i(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} + \left(\frac{d}{d\lambda} \alpha^i(\mathbf{q}) \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = 0, \quad (6.8)$$

onde $L_{\mathbf{X}}\mathcal{L}$ é a derivada de Lie de \mathcal{L} com respeito a \mathbf{X} . Portanto, se $L_{\mathbf{X}}\mathcal{L} = 0$, dizemos que \mathbf{X} é o gerador infinitesimal de simetria para a dinâmica descrita pela Lagrangiana considerada.

Fazendo uso da Lagrangiana, das equações de Euler-Lagrange associadas a esta e o campo vetorial (6.7), chegamos a

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\alpha^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) = L_{\mathbf{X}}\mathcal{L}. \quad (6.9)$$

Segue portanto, o teorema de Noether:

Se $L_{\mathbf{X}}\mathcal{L} = 0$, então a função $\Sigma_0 = \alpha^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}$ é uma constante de movimento.

A simetria de Noether empregada nesta análise está relacionada com a simetria sob translações infinitesimais nas coordenadas espaciais. Desta maneira, para o presente modelo temos como gerador infinitesimal de simetria

$$\mathbf{X} = \alpha \frac{\partial}{\partial a} + \beta \frac{\partial}{\partial \phi} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \dot{\phi} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \left(\frac{\partial \beta}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \beta}{\partial \phi} \dot{\phi} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}, \quad (6.10)$$

onde α e β a princípio são funções de a e ϕ .

Aplicando este gerador à Lagrangiana pontual (5.40), temos

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{X}}\mathcal{L} &= \alpha \left(6F\dot{a}^2 + 12F'\dot{a}a\dot{\phi} + \frac{9}{2F}a^2F'^2\dot{\phi}^2 + \frac{3}{2}a^2\dot{\phi}^2 + 3a^2V \right) \\ &+ \beta \left(6F'\dot{a}^2a + 6F''\dot{a}a^2\dot{\phi} - \frac{3}{2F^2}a^3F'^3\dot{\phi}^2 + \frac{3a^3}{F}F'F''\dot{\phi}^2 + a^3V' \right) \\ &+ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \dot{\phi} \right) \left(12F\dot{a}a + 6F'a^2\dot{\phi} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial \beta}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \beta}{\partial \phi} \dot{\phi} \right) \left(6F'a^2\dot{a} + \frac{3}{F}a^3F'^2\dot{\phi} - a^3\dot{\phi} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

A equação acima depende explicitamente de \dot{a} , $\dot{\phi}$ e suas potências. A fim de verificar sua nulidade, devemos anular cada um dos seus coeficientes. Obteremos assim, um sistema de equações diferenciais parciais acopladas [51], [52] e [53],

$$\alpha + 2a \frac{\partial \alpha}{\partial a} + a \left(\beta + a \frac{\partial \beta}{\partial a} \right) \frac{F'}{F} = 0, \quad (6.12)$$

$$\beta a F'' + \left(2\alpha + a \frac{\partial \alpha}{\partial a} + a \frac{\partial \beta}{\partial \phi} \right) F' + 2F \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} - \frac{a^2}{6} \left(1 - \frac{3F'^2}{F} \right) \frac{\partial \beta}{\partial a} = 0, \quad (6.13)$$

$$3\alpha - 12 \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} F' + 2a \left(1 - \frac{3F'^2}{F} \right) \frac{\partial \beta}{\partial \phi} - 3 \left(3\alpha - a\beta \frac{F'}{F} + 2a\beta \frac{F''}{F'} \right) \frac{F'^2}{F} = 0, \quad (6.14)$$

$$3\alpha V + a\beta V' = 0. \quad (6.15)$$

Agora vamos resolver o sistema acima. Isolando β da equação (6.15) e substituindo

em (6.12), obtemos

$$\frac{FV'}{3VF' - 2FV'} = \frac{a}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial a}. \quad (6.16)$$

O lado esquerdo da equação é função somente de ϕ , enquanto o lado direito é uma função de a e de ϕ , e envolve somente derivada com respeito a a . Se $\alpha = f_0(a)f_1(\phi)$,

$$\frac{a}{f_0} \frac{df_0}{da} = \frac{FV'}{3VF' - 2FV'} = m, \quad (6.17)$$

onde m é uma constante arbitrária. Integrando o lado esquerdo de (6.17) obtemos a seguinte expressão

$$\alpha = a^m f_1(\phi). \quad (6.18)$$

Agora, integrando o lado direito de (6.17) encontramos

$$V = V_0 F^{\frac{3m}{2m+1}}, \quad (6.19)$$

onde V_0 é uma constante de integração. Observe que $m \neq -\frac{1}{2}$. Usando este resultado, podemos reescrever (6.12) como

$$\beta = -\frac{2m+1}{m} a^{m-1} f_1 \frac{F}{F'}, \quad (6.20)$$

com $m \neq 0$ e $m \neq -\frac{1}{2}$.

Consideramos que f_1 tem a forma de uma lei de potência tipo $f_1(\phi) = \alpha_0 \phi^n$, onde α_0 é uma constante arbitrária. Fazendo uso de (6.18) e (6.20), e das equações (6.12)-(6.15), constatamos que o acoplamento deve ter a forma $F = F_0 \phi^2$ para que o sistema seja satisfeito. Temos F_0 como uma constante a ser determinada. A partir disto, obtemos novos coeficientes α e β :

$$\alpha = \alpha_0 a^m \phi^n, \quad (6.21)$$

$$\beta = -\alpha_0 \frac{2m+1}{2m} a^{m-1} \phi^{n+1}. \quad (6.22)$$

Aplicando estes coeficientes nas equações (6.14) e (6.15), encontramos

$$F_0 = \frac{-2m(m+n-1) - n}{24(m-n-1)}, \quad (6.23)$$

com

$$n = \frac{2(m^2 - 1)}{2m + 1}. \quad (6.24)$$

Estas equações não são válidas para $m = 0$ e $m = -\frac{1}{2}$, já que aparecem divergências em (6.22), no expoente $\frac{3m}{2m+1}$ e (6.24). Ainda existe restrição para $n = 0$, que encontramos a partir de (6.24), sendo $m = -1, 1$. O valor $m = 1$ deve ser descartado neste caso, pois gera indeterminação em (6.23). Essas soluções devem ser analisadas separadamente. Portanto, as constantes encontradas acima são válidas para todo m , exceto $m \neq -1/2$ e $m \neq 0$, com $n \neq 0$. Para $m = 1$, $n = 0$ as constantes são as que se seguem

$$\alpha = \alpha_0 a, \quad \beta = -\frac{3\alpha_0}{2} \phi. \quad (6.25)$$

Ao substituírmos estes coeficientes em (6.14) e (6.15), usando $F = F_0 \phi^2$, observamos que elas são identicamente satisfeitas para um F_0 arbitrário. Desta maneira, indeterminações são evitadas, pois α , neste caso, não depende de ϕ e β não depende de a , portanto $\frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = 0$ e $\frac{\partial \beta}{\partial a} = 0$. Assim estes termos são eliminados das equações (6.14) e (6.15), e indeterminações não podem surgir.

As soluções gerais na forma de leis de potência, encontradas nesta análise, estão resumidas abaixo

Intervalo de validade	α	β	V	F	F_0
$m, n \neq 0; m \neq -\frac{1}{2}$	$\alpha_0 a^m \phi^n$	$-(3\alpha_0/2l) a^{m-1} \phi^{n+1}$	$V_0 F^{\frac{3m}{2m+1}}$	$F_0 \phi^2$	$\frac{2m-n-2mn-2m^2}{24(m-n-1)}$
$m = 1, n = 0$	$\alpha_0 a$	$-(3\alpha_0/2)\phi$	$V_0 \phi^2$	$F_0 \phi^2$	F_0

Tabela 1. Soluções com $\alpha \neq 0$ and $\beta \neq 0$.

6.2 Constantes de Movimento

Para o caso em que $m, n \neq 0$; $m \neq -\frac{1}{2}$, segundo (6.6), temos a seguinte constante de movimento

$$\begin{aligned} \Sigma_0 = & 3 \left[\frac{2m - n - 2mn - m^2}{12m(m - n - 1)} \right] \left(-a^{m+1} \dot{a} \phi^{n+2} + 2a^{m+2} \phi^n \dot{\phi} \right. \\ & \left. - 3(2m + 1)a^{m+2} \phi^{n+1} \dot{\phi} + \frac{(2m + 1)}{2m} a^{m+2} \phi^{n+1} \dot{\phi} \right). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Para $m = 1$ e $n = 0$,

$$\Sigma_0 = -6F_0 \phi a^2 \left(\phi \dot{a} + a \dot{\phi} \right) + \frac{3}{2} a^3 \phi \dot{\phi}. \quad (6.27)$$

A constante de movimento é uma quantidade conservada, que a princípio, não conhecemos sua interpretação física. Esta quantidade conservada pode estar associada ou não a uma quantidade física.

De posse do potencial de auto-interação do campo escalar, da função de acoplamento ao campo gravitacional e da constante de movimento associada a estes, encontraremos, no próximo capítulo, as soluções para as equações de campo do modelo. Como será visto, escolhemos trabalhar apenas com $F(\phi)$ e $V(\phi)$ obtidos para $m = 1$ e $n = 0$, já que o potencial de auto-interação pode ser identificado como um potencial do tipo massivo, o que é fisicamente interessante. Além do que esta escolha nos leva a uma solução analítica para nossas equações de campo.

Neste capítulo a simetria de Noether foi explorada com o intuito de restringir o potencial de auto-interação do campo escalar e o acoplamento ao campo gravitacional. A partir do teorema de Noether encontramos a quantidade conservada associada à simetria, chamada de constante de movimento, que será utilizada no próximo capítulo para auxiliar na solução das equações de campo.

Solução das equações de campo

Soluções analíticas para as equações de campo do modelo proposto serão encontradas neste capítulo. Analisaremos as formas assintóticas para estas soluções na tentativa de descrever um Universo desacelerado no passado e acelerado atualmente. Por fim, realizaremos uma análise comparativa entre as soluções do formalismo métrico e de Palatini.

7.1 Soluções

Vamos analisar o caso em que $m = 1$ e $n = 0$ da tabela (6.1.1), visto que é nele que identificamos o potencial de auto-interação como um potencial do tipo massivo, o que é fisicamente interessante. Para encontrarmos as soluções para as equações de campo precisamos reescrever a Lagrangiana pontual (5.40) em outras coordenadas que facilitem a integração. Desta maneira, sabendo que por existir uma simetria de Noether relacionada ao acoplamento $F(\phi)$ e ao potencial $V(\phi)$, deve existir uma transformação de coordenadas no espaço de configurações, em que uma destas coordenadas seja cíclica. Essa transformação obedece o seguinte sistema de equações diferenciais [54]

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial a} + \beta \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0, \quad (7.1)$$

$$\alpha \frac{\partial z}{\partial a} + \beta \frac{\partial z}{\partial \phi} = 1. \quad (7.2)$$

Agora as novas variáveis são $\{u, z\}$, sendo que z é a variável cíclica.

Obtivemos como uma solução particular para o sistema de equações as seguinte expressões: $u = a^3 \phi^2$ e $z = \ln a$. Com isto, reescrevemos a Lagrangiana pontual (5.40) nas novas coordenadas

$$\mathcal{L} = \lambda_1 \dot{u} \dot{z} - \lambda_2 u \dot{z}^2 + \lambda_3 \frac{\dot{u}^2}{u} + V_0 u + \rho_m^0, \quad (7.3)$$

onde

$$\lambda_1 = \frac{3}{4}(1 - 4F_0); \quad \lambda_2 = \frac{3}{8}(3 - 4F_0); \quad \lambda_3 = -\frac{1}{8}(1 - 12F_0). \quad (7.4)$$

A partir das equações de Euler-Lagrange para z e u encontramos as novas equações de movimento do sistema

$$2\lambda_2 u \dot{z} - \lambda_1 \dot{u} = \Sigma_0, \quad (7.5)$$

$$2\lambda_3 \frac{\ddot{u}}{u} + \lambda_1 \ddot{z} + \lambda_2 \dot{z}^2 - \lambda_3 \frac{\dot{u}^2}{u^2} - V_0 = 0, \quad (7.6)$$

onde Σ_0 é a constante de movimento (6.27). A função energia associada à Lagrangiana pontual (5.40) fornece mais uma equação

$$\lambda_3 \frac{\dot{u}^2}{u^2} + \lambda_1 \frac{\dot{u}}{u} \dot{z} - (V_0 + \lambda_2 \dot{z}^2) - \frac{\rho_m^0}{u} = 0. \quad (7.7)$$

Tomamos o cuidado de testar todas as novas equações de movimento para termos a certeza de que elas descrevem a mesma dinâmica da Lagrangiana original (5.40). Substituindo novamente as coordenadas antigas nas equações (7.5), (7.6) e (7.7), obtemos a constante de movimento (6.27), a equação de Klein-Gordon (5.47) e a equação de Friedmann (5.45) para $F = F_0 \phi^2$, respectivamente.

Temos agora três equações diferenciais, (7.5), (7.6) e (7.7), sendo que duas delas são linearmente dependentes, e temos apenas duas incógnitas, z e u . Para encontrarmos a solução, primeiramente isolamos \dot{z} da equação (7.5) e substituímos em (7.7). Por simplicidade, escolhemos fazer a substituição desta maneira por se tratar de equações de primeira ordem. Assim

sendo, obtemos então

$$\left(\lambda_3 + \frac{1}{4} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2}\right) \dot{u}^2 - \frac{\Sigma_0^2}{4\lambda_2} - V_0 u^2 - \rho_m^0 u = 0. \quad (7.8)$$

E por sua vez, através de uma tabela de integrais [55] encontramos duas soluções possíveis para este caso. Temos como primeira solução

$$u = \frac{\rho_m^0}{2V_0} \left[u_0 \sinh(C_1 t + C) - 1 \right], \quad (7.9)$$

para $\Sigma_0^2 > \frac{\lambda_2 (\rho_m^0)^2}{V_0}$. E como segunda

$$u = \frac{\rho_m^0}{2V_0} \left[C_3 e^{C_1 t} - 1 \right], \quad (7.10)$$

para $\Sigma_0^2 = \frac{\lambda_2 (\rho_m^0)^2}{V_0}$.

Observe que λ_2 deve ser positivo para respeitar a restrição feita acima e que C é uma constante de integração. Encontramos outras constantes além desta, que são C_1 , C_3 e u_0 . Denotamos a constante C_1 da seguinte maneira

$$C_1 = \sqrt{\frac{4\lambda_2 V_0}{(4\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1^2)}}. \quad (7.11)$$

Definimos C_3 como se segue

$$C_3 = \frac{V_0}{\rho_m^0} e^C, \quad (7.12)$$

e u_0 como

$$u_0 = \sqrt{\frac{\Sigma_0^2 V_0}{\lambda_2 (\rho_m^0)^2} - 1}. \quad (7.13)$$

Integrando (7.5) obtemos

$$z = \frac{\Sigma_0}{2\lambda_2} \int \frac{dt}{u} + \ln \left(z_0 u^{\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}} \right), \quad (7.14)$$

onde z_0 é uma constante de integração.

7.2 Fator de escala e campo escalar

De posse dos resultados da seção anterior buscaremos agora soluções para o fator de escala a e para o campo escalar ϕ .

7.2.1 Primeira solução

Substituindo (7.9) em (7.14) e lembrando que $z = \ln a$, obtemos o fator de escala para a primeira solução

$$a = \left[\frac{\tanh \frac{1}{2} (C_1 t + C) + u_0 - \sqrt{1 + u_0^2}}{\tanh \frac{1}{2} (C_1 t + C) + u_0 + \sqrt{1 + u_0^2}} \right]^p \left[u_0 \sinh (C_1 t + C) - 1 \right]^{\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}}, \quad (7.15)$$

onde

$$p = \frac{\Sigma_0 V_0}{\lambda_2 \rho_m^0 C_1 \sqrt{1 + u_0^2}}. \quad (7.16)$$

Fazendo uso da solução particular $u = a^3 \phi^2$ encontrada na transformação de coordenadas no espaço de configurações, encontramos o campo escalar para esta primeira solução

$$\phi = \phi_0 \left[\frac{\tanh \frac{1}{2} (C_1 t + C) + u_0 - \sqrt{1 + u_0^2}}{\tanh \frac{1}{2} (C_1 t + C) + u_0 + \sqrt{1 + u_0^2}} \right]^{\frac{-3p}{2}} \left[u_0 \sinh (C_1 t + C) - 1 \right]^{\frac{2\lambda_2 - 3\lambda_1}{4\lambda_2}}, \quad (7.17)$$

onde

$$\phi_0 = z_0^{-3/2} \left(\frac{\rho_m^0}{2V_0} \right)^{\frac{2\lambda_2 - 3\lambda_1}{4\lambda_2}}. \quad (7.18)$$

7.2.2 Segunda solução

Realizando o mesmo procedimento usado na subseção anterior, encontramos o fator de escala para a segunda solução

$$a = a_0 e^{-a_1 t} (C_3 e^{C_1 t} - 1)^{q + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}}, \quad (7.19)$$

onde

$$a_0 = z_0 \left(\frac{\rho_m^0}{2V_0} \right)^{\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}}, \quad a_1 = \frac{\Sigma_0 V_0}{\lambda_2 \rho_m^0} \quad \text{e} \quad q = \frac{\Sigma_0 V_0}{\lambda_2 \rho_m^0 C_1}. \quad (7.20)$$

E da mesma maneira, obtemos o campo escalar para este caso

$$\phi = \phi_0 e^{\frac{3a_1}{2} t} (C_3 e^{C_1 t} - 1)^{\frac{2\lambda_2(1-3q)-3\lambda_1}{4\lambda_2}}. \quad (7.21)$$

7.3 Análise das soluções

Trataremos nesta seção das formas assintóticas para as soluções (7.15), (7.17), (7.19) e (7.21).

7.3.1 Forma assintótica para o fator de escala da primeira solução

Se fizermos $C = 0$ em (7.15) e expandir a função hiperbólica até a primeira ordem em t , considerando $C_1 t \ll u_0$, para pequenos valores de t , temos a seguinte forma assintótica

$$a \approx A_0 [-1 + u_0 C_1 t]^{\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}}, \quad (7.22)$$

onde

$$A_0 = a_0 \left[\frac{u_0 - \sqrt{1 + u_0^2}}{u_0 + \sqrt{1 + u_0^2}} \right]^p. \quad (7.23)$$

7.3.2 Restrição das constantes

Para que esta solução descreva o período do Universo em que a matéria dominava, conhecido como Era da Matéria, o fator de escala deve obedecer a proporcionalidade $a \propto t^{2/3}$. Portanto, estabelecemos como vínculo

$$\frac{\lambda_1}{2\lambda_2} = \frac{2}{3}, \quad (7.24)$$

o que nos leva a

$$a \approx A_0 (B + Dt)^{\frac{2}{3}}. \quad (7.25)$$

Agora vamos verificar a validade de tal restrição através da análise das constantes λ_1 e λ_2 , lembrando que $F_0 > 0$ deve ser respeitado, já que esta condição descreve a gravidade como uma força atrativa. Através das definições de λ_1 e λ_2 (7.4) e da restrição (7.24), encontramos um valor negativo para F_0 . Desta maneira, observamos que a primeira solução para o fator de escala não reproduz a Era da Matéria com o constituinte, que descreve a matéria usual e matéria escura, tendo uma pressão nula. Assim sendo, para o limite $t \rightarrow 0$, temos

$$a \approx A_0 (B + Dt)^{\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}}. \quad (7.26)$$

No futuro, limite em que $t \rightarrow \infty$, obtemos um Universo de *de Sitter*, pois o fator de escala segue a proporcionalidade: $a \propto e^{kt}$, onde k deve ser maior que zero e constante.

$$a \approx G_1 (e^{C_1 t})^{\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}}, \quad (7.27)$$

onde

$$G_1 = a_0 \left[\frac{1 + u_0 - \sqrt{1 + u_0^2}}{1 + u_0 + \sqrt{1 + u_0^2}} \right]^p \left(\frac{u_0}{2} e^C \right)^{\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}}. \quad (7.28)$$

Um Universo de *de Sitter* é uma solução para as equações de campo de Einstein da Relatividade Geral. Esta solução descreve o Universo como espacialmente plano e negligência a matéria ordinária, então a princípio, a dinâmica do Universo é dominada pela constante cosmológica que corresponde à energia escura no nosso Universo ou um *inflaton* (campo responsável pela inflação)

no Universo primordial. Os modelos cosmológicos em concordância com as observações atuais da aceleração do Universo estão convergindo para um modelo consistente onde nosso Universo foi melhor descrito como um Universo de *de Sitter* em cerca de $t = 10^{-33}s$ após o Big Bang, e em um futuro distante [25].

Fazendo uso das definições de λ_1 e λ_2 de (7.4), de tal maneira que F_0 seja maior que zero, obtemos a seguinte expressão

$$\frac{\lambda_1}{2\lambda_2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2\lambda_1} + 1\right)}. \quad (7.29)$$

No caso limite em que $F_0 = 0$, temos que

$$\frac{\lambda_1}{2\lambda_2} = \frac{1}{3}. \quad (7.30)$$

Constatamos desta maneira que a razão $\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}$ deve ser sempre menor que o valor encontrado no caso limite (7.30), já que abaixo deste valor, F_0 apresenta valores positivos. Isto pode ser observado claramente nas próprias expressões que definem λ_1 e λ_2 . No entanto, ainda devemos lembrar que a razão $\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}$, por se tratar também do expoente da solução encontrada para o fator de escala para a Era Atual (7.27), deve obedecer a esta condição: $\frac{\lambda_1}{2\lambda_2} > 0$, para que assim reproduza um Universo de *de Sitter*, que é caracterizado por uma expansão acelerada. Desta maneira, obtemos como limite para esta razão a seguinte expressão

$$0 < \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} < \frac{1}{3}. \quad (7.31)$$

Esta solução não reproduz a Era da Matéria usual com um fluido sem pressão, já que para isto $\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}$ deveria ser igual a $\frac{2}{3}$, o que não ocorre. Interpretamos assim, que a solução em questão descreve um Universo desacelerado no passado composto por um fluido efetivo, que nada mais é do que a combinação do campo escalar e de matéria. Reescrevendo a restrição da razão $\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}$ em termos de F_0 , encontramos como limites

$$0 < \frac{(1 - 4F_0)}{(3 - 4F_0)} < \frac{1}{3} \quad (7.32)$$

Primeiramente, analisando o caso em que a razão acima é menor que $\frac{1}{3}$, verificamos que $F_0 > 0$, o que concorda com o que é imposto anteriormente. Analisando o caso em que esta

mesma razão é maior que zero encontramos que $F_0 < \frac{1}{4}$, o que de está correto, pois o valor $\frac{1}{4}$ é o caso limite em que tanto λ_1 quanto λ_2 se anulam. Sendo assim, F_0 deve ser dado por valores menores do que $\frac{1}{4}$ para que estas ambas constantes sejam quantidades positivas. Mais uma vez isto pode ser observado nas próprias expressões que definem λ_1 e λ_2 . Estas constantes devem ser positivas e sua razão deve respeitar o limite apresentado anteriormente, para que de fato a solução possa descrever um Universo em expansão acelerada na Era Atual, e um Universo desacelerado no passado composto por um fluido efetivo. Portanto, a restrição em F_0 se apresenta como

$$0 < F_0 < \frac{1}{4}. \quad (7.33)$$

Esta restrição garante que o Universo não colapse.

É necessário verificarmos a positividade da constante C_1 para termos certeza de que a solução (7.27) descreve um Universo de *de Sitter*. Sabemos que $\lambda_2 > 0$ e $V_0 > 0$, portanto basta analisarmos se o denominador de (7.11) obedece à restrição

$$4\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1^2 > 0. \quad (7.34)$$

Substituindo λ_1 , λ_2 e λ_3 de (7.4) em (7.34), no caso limite em que $F_0 = 0$, verificamos que a restrição é satisfeita. Agora, para termos certeza, analisaremos um caso em que F_0 seja pequeno, menor que $\frac{1}{4}$, imposto pela restrição (7.33). Usaremos como exemplo $F_0 = \frac{1}{24}$ no resultado encontrado acima após a substituição das constantes λ_1 , λ_2 e λ_3 , na expressão que define o denominador em questão. Encontramos como resultado: $\frac{1}{16} < \frac{25}{272}$. Claramente vemos que a restrição é satisfeita, visto que este resultado faz sentido. Assim, tanto o denominador quanto o numerador da constante C_1 são positivos, o que torna a própria positiva. Portanto, concluímos que a solução (7.27) realmente descreve um Universo de *de Sitter*.

7.3.3 Forma assintótica para o campo escalar da primeira solução

No limite em que t é pequeno na solução (7.17), temos

$$\phi(t) \approx \varphi_0 \left(-1 + u_0 C_1 t \right)^{\frac{2\lambda_2 - 3\lambda_1}{4\lambda_2}}, \quad (7.35)$$

onde

$$\varphi_0 = \phi_0 \left(\frac{A_0}{a_0} \right)^{-\frac{3}{2}}. \quad (7.36)$$

Por fim, para $t \rightarrow 0$, obtemos

$$\phi(t) \approx \varphi_1, \quad (7.37)$$

onde φ_1 é uma constante dada por

$$\varphi_1 = \varphi_0 (-1)^{\frac{2\lambda_2 - 3\lambda_1}{4\lambda_2}}. \quad (7.38)$$

Concluimos de que se trata de um resultado coerente. Conseguimos descrever o Universo no passado, em que o campo escalar era pequeno e praticamente constante. Nesta época, o fluido efetivo, neste caso, combinação de campos escalar e de matéria, predominava.

Para $t \rightarrow \infty$ em (7.17), temos a expressão que descreve o campo escalar no futuro

$$\phi(t) \approx \varphi_2 (e^{C_1 t})^{\frac{2\lambda_2 - 3\lambda_1}{4\lambda_2}}, \quad (7.39)$$

onde

$$\varphi_2 = \phi_0 a_0^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1 + u_0 - \sqrt{1 + u_0^2}}{1 + u_0 + \sqrt{1 + u_0^2}} \right]^{-\frac{3p}{2}} (-1)^{\frac{2\lambda_2 - 3\lambda_1}{4\lambda_2}}. \quad (7.40)$$

7.3.4 Forma assintótica para o fator de escala da segunda solução

Antes de qualquer consideração, devemos observar que a solução (7.19) só é válida para $\Sigma_0^2 = \frac{\lambda_2 \rho_m^0}{V_0}$, portanto λ_2 deve ser maior que zero, visto que Σ_0^2 , ρ_m^0 e V_0 são grandezas positivas. E que a constante a_1 , que se encontra na segunda solução para o fator de escala, é positiva também, já que é dado por: $a_1 = \frac{\Sigma_0 V_0}{\rho_m^0 \lambda_2}$. Feitas estas considerações podemos partir para a análise dos limites da solução em questão. Iniciando pelo limite em que $t \rightarrow 0$ em (7.19), temos como resultado

$$a \approx a_0 (C_3 + C_1 t)^{q + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}}. \quad (7.41)$$

Para restringirmos a solução à Era da Matéria, devemos obrigatoriamente impor que

$$q + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} = \frac{2}{3}, \quad (7.42)$$

o que nos leva a $F_0 \rightarrow \frac{3}{4}$. Note que se fizermos $F_0 = \frac{3}{4}$, temos uma forma indeterminada para o expoente da solução (7.19), já que para este valor de F_0 , λ tende a zero e a constante C_1 se anula. Desta maneira, é possível recuperar aproximadamente a Era da Matéria no passado com F_0 próximo de $\frac{3}{4}$. Isto implica, através de $\Sigma_0^2 = \frac{\lambda_2 \rho_m^0}{V_0}$, que a constante de movimento Σ_0 , tenha um valor pequeno. Portanto, todos os valores positivos de F_0 , exceto $\frac{3}{4}$, produzem um Universo não colapsante, sendo todos eles aceitáveis. No entanto, somente valores próximos de $F_0 = \frac{3}{4}$ são capazes de produzir uma "quasi" Era dominada pela matéria.

Mantendo todas as considerações para t pequeno, o limite para t grande em (7.19), gera também uma expansão como a de *de Sitter*

$$a \approx A_2 e^{[C_1(q + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}) - a_1]t}, \quad (7.43)$$

onde

$$A_2 = a_0 (C_3)^{q + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}}. \quad (7.44)$$

7.3.5 Forma assintótica para o campo escalar da segunda solução

Para pequenos valores de t , temos

$$\phi(t) \approx \phi_0 (C_3 + C_1 t)^{\frac{2\lambda_2 - 6\lambda_2 q - 3\lambda_1}{4\lambda_2}}. \quad (7.45)$$

Fazendo $t \rightarrow 0$ em (7.21)

$$\phi(t) \approx \phi_0 C_3, \quad (7.46)$$

onde ϕ_0 e C_3 são constantes.

A solução descreve um Universo no passado em que o campo escalar era pequeno e praticamente constante. Nesta época a matéria predominava.

No caso em que $t \rightarrow \infty$ em (7.21), obtemos a solução que descreve o campo escalar no futuro

$$\phi(t) \approx \varphi_3 e^{\left[C_1 \left(\frac{2\lambda_2 - 6\lambda_2 q - 3\lambda_1}{4\lambda_2} + \frac{3}{2}a_1 \right) \right] t}, \quad (7.47)$$

onde

$$\varphi_3 = \phi_0 (C_3)^{\frac{2\lambda_2 - 6\lambda_2 q - 3\lambda_1}{4\lambda_2}}. \quad (7.48)$$

Sabendo, através de suas formas assintóticas, que o Universo se expandiu desaceleradamente no passado e que ele deve se expandir de forma acelerada no futuro, deve existir um período de transição, em que $\ddot{a} = 0$, que permite a modelagem das soluções.

7.4 Comparação entre o formalismo métrico e o de Palatini

Neste seção apresentaremos uma análise comparativa da dinâmica do modelo proposto de campo escalar não-minimamente acoplado em formulações métrica e de Palatini. Será mostrado que os dois formalismos produzem soluções diferentes entre si desde que o acoplamento não-mínimo não seja nulo.

Para realizarmos esta análise comparativa, utilizamos os resultados obtidos em [56] e [57] para o formalismo métrico. A ação proposta neste trabalho citado tem a mesma forma da ação do modelo (4.8) que é assunto desta dissertação.

Como foi visto no capítulo 5, derivamos as expressões para a densidade de energia (5.3) e pressão (5.11) do campo escalar através do cálculos das componentes do tensor energia-momento generalizado (4.56) encontrado. A densidade de energia e a pressão do campo escalar obtidas via formulação métrica são, respectivamente,

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) - 6HF'\dot{\phi} \quad (7.49)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) + 2\left(F''\dot{\phi}^2 + F'\ddot{\phi}\right) + 4HF'\dot{\phi}. \quad (7.50)$$

Note que ambas as equações foram reescritas de tal maneira que suas formas pudessem

se assemelhar o máximo possível com os resultados apresentados nesta dissertação, facilitando assim, a comparação. Trocamos os sinais dos termos em que aparece a função de acoplamento $F(\phi)$ nas equações acima, já que foi assumido $F < 0$ em [56]. Desta maneira, observamos que os resultados obtidos através do formalismo de Palatini para a densidade de energia e para a pressão do campo escalar são iguais a menos do termo de segunda ordem $\frac{3}{2F}F'^2\dot{\phi}^2$.

Comparamos ainda a Lagrangiana pontual obtida em (5.40) e em [57]. Esta última, reescrita em termos de derivadas de F com respeito a ϕ e de derivadas de ϕ com relação a t , se apresenta da seguinte maneira

$$\mathcal{L} = 6Fa\dot{a}^2 + 6F'a^2\dot{\phi} - \frac{1}{2}a^3\dot{\phi}^2 + a^3V + \rho_m^0. \quad (7.51)$$

Feitas as alterações de sinais e das derivadas de F , citadas e justificadas anteriormente, encontramos a seguinte equação de Klein-Gordon para a formulação métrica [56]

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - RF' + V' = 0. \quad (7.52)$$

Verificamos que as Lagrangianas pontuais obtidas em ambos os formalismos são iguais a menos do termo de segunda ordem $\frac{3}{2F}F'^2a^3\dot{\phi}^2$. A equação de Klein-Gordon encontrada para o formalismo de Palatini (5.47) tem como coeficientes dos termos $\ddot{\phi}$ e $\dot{\phi}$, as seguintes expressões, respectivamente, $\left(1 - \frac{3F'^2}{F}\right)$ e $3H\left(1 - \frac{3F'^2}{F}\right)$, enquanto que para o formalismo métrico [56], para os mesmos termos temos, respectivamente, 1 e $3H$. Além destas diferenças entre coeficientes, aparece um termo extra na equação de Klein-Gordon para a formulação de Palatini. Este termo tem a seguinte forma: $3\left(\frac{F'^3}{2F^2} - \frac{F'F''}{F}\right)\dot{\phi}^2$. Por fim, comparamos as formas do potencial de auto-interação $V(\phi)$ e do acoplamento não-mínimo $F(\phi)$ para ambos os casos. Para a formulação métrica foram obtidos, através da simetria de Noether, $V(\phi) = V_0F(\phi)^{\frac{3(s+1)}{2s+3}}$ para o potencial e $F(\phi) = \frac{(2s+3)^2}{48(s+1)(s+2)}(\phi + \phi_i)^2$ para o acoplamento não-mínimo, onde s é um número inteiro e ϕ_i é uma constante de integração. Já para a formulação de Palatini, temos (6.19) para o potencial e $F(\phi) = F_0\phi^2$ para o acoplamento.

Analisando as equações indicadas para a comparação em questão, concluímos que as soluções do formalismo de Palatini descrevem uma dinâmica diferente das soluções do formalismo métrico.

Neste capítulo encontramos as soluções para as equações de campo do modelo e exploramos seus limites para pequenos e grandes valores de t . Realizamos uma análise comparativa entre as soluções do formalismo métrico e as soluções do formalismo de Palatini. Verificamos através desta comparação que as soluções para a formulação de Palatini descrevem uma dinâmica diferente

das soluções para a formulação métrica. Constatamos ainda, neste capítulo e nos anteriores, que foi possível realizar uma análise de um campo escalar não-minimamente acoplado através do formalismo de Palatini e determinar o acoplamento $F(\phi)$ e o potencial $V(\phi)$ através de simetria de Noether. As equações de campo foram integradas e soluções analíticas foram encontradas para o fator de escala e para o campo escalar. Notamos que a primeira solução (7.15) não reproduz a Era da Matéria usual onde $p_m = 0$. Para reproduzi-la, o expoente $\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}$ na equação (7.15) deveria ter como valor $\frac{2}{3}$. Entretanto, observamos que isto não é válido, pois neste caso $F_0 < 0$, o que não pode ocorrer. A condição $F_0 > 0$ deve ser satisfeita para termos uma gravidade atrativa. Para que isto acontecer, o expoente deve ser limitado da seguinte maneira: $0 < \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} < \frac{1}{3}$. Portanto, a solução em questão descreve um Universo que é desacelerado no passado, composto por um fluido efetivo, uma combinação de campos escalar e de matéria, que atualmente é acelerado, e no futuro descreve um Universo de *de Sitter*. Concluimos também que a segunda solução (7.19) descreve uma "quasi" Era da Matéria quando F_0 é próximo de $\frac{3}{4}$. A mesma solução, assim como a primeira, descreve um Universo de *de Sitter* no futuro. Esta segunda solução também descreve o Universo no passado quando o campo escalar era praticamente constante.

Conclusões

Neste trabalho, abordamos um modelo com campo escalar não-minimamente acoplado com o objetivo de investigar possíveis formas para o potencial e acoplamento, as quais possibilitam as descrições de épocas aceleradas e desaceleradas da expansão cosmológica. Os resultados aqui obtidos mostram que, se a simetria de Noether for satisfeita, temos formas bastante restritas para o acoplamento e para o potencial. Constatamos ainda que foi possível realizar uma análise de um campo escalar não-minimamente acoplado através do formalismo de Palatini. As equações de campo foram integradas e soluções analíticas foram encontradas para o fator de escala e o campo escalar.

O presente trabalho nos mostrou que, satisfazendo a simetria de Noether, quando temos um acoplamento não-mínimo do campo escalar com o campo gravitacional, chegamos à previsões de um Universo desacelerado no passado e acelerado no futuro. As duas soluções apresentadas nesta dissertação para o presente modelo concordam com as observações atuais da aceleração do Universo, sendo ele melhor descrito como um Universo de *de Sitter* em um futuro distante e em uma das soluções, dominado no passado por um fluido efetivo, uma combinação de campo escalar e de matéria, capaz de desacelerar sua expansão, e na outra solução, sendo dominado por matéria. Portanto, a primeira solução para o fator de escala não reproduz a Era da Matéria usual onde a pressão da matéria é nula. A segunda solução consegue descrever o passado do Universo, quando o campo escalar era pequeno e praticamente constante, através de uma "quasi" Era da Matéria. De acordo com o comportamento do campo escalar descrito por este modelo, concluimos assim, que este campo representa a energia escura.

Concluimos também que as soluções do formalismo de Palatini descrevem uma dinâmica diferente das soluções do formalismo métrico. Os dois formalismos produzem soluções diferentes entre si desde que o acoplamento não-mínimo não seja nulo.

Como um prosseguimento ao trabalho iniciado nessa dissertação, podemos estender o trabalho desenvolvido durante o mestrado para uma métrica mais geral, uma métrica anisotrópica do espaço de Bianchi tipo I [19], explorar as consequências físicas desta generalização, comparar os resultados deste modelo de Universo de Bianchi [58] com o que foi feito nesta dissertação, a fim de compreendermos a importância desta generalização para estas consequências. Desta maneira, temos como objetivo descrever um modelo que contemple soluções mais gerais do que as obtidas neste trabalho e que possa descrever o maior número possível de eras do Universo, tais como o período inflacionário, a Era da Matéria e o período Atual. Esperamos também que a simetria de Noether restrinja os parâmetros de tal maneira que estes nos leve à soluções de interesse, e por sua vez, generalidade nas soluções devido à aplicação do formalismo de Palatini. Por fim, estenderemos essas análises para outros espaços de Bianchi.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Novello et al.. *Programa Mínimo de Cosmologia* (ICRA Brasil, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) e Ministério da Ciência e Tecnologia, 2010).
- [2] A. Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology. 2th edition* (John Wiley & Sons, 2003).
- [3] G. Gamow. Expanding Universe and the Origin of Elements. *Physical Review* **70**, 572–573 (1946).
- [4] A. A. Penzias e R. W. Wilson. Measurement of the flux density of CAS a at 4080 Mc/s. *American Astronomical Society* **142**, 1149–1155 (1965).
- [5] F. Kokubun. A Lei de Hubble e a Homogeneidade do Universo. *Revista Brasileira de Ensino de Física* **21**, 311–313 (1999).
- [6] K. G. Begeman, A. H. Broelis e R. H. Sanders. Extended rotation curves of spiral galaxies - Dark haloes and modified dynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **249**, 523–537 (1991).
- [7] B. D. Wandelt et al.. Self-Interacting Dark Matter. *arXiv: astro-ph006344v2* (2000).
- [8] J. A. Sellwood e A. Kosowsky. Does Dark Matter Exist? *ArXiv: astro-ph009074v1* (2000).
- [9] S. M. Carroll. Why is the Universe Accelerating? *AIP Conference Proceedings* **743**, 16–32 (2005).
- [10] E. J. Copeland, M. Sami e S. Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *International Journal of Modern Physics D* **15**, 1753–1936 (2006).

-
- [11] P. Binetruy. Cosmological constant vs. quintessence. *International Journal of Theoretical Physics* **39**, 1859–1875 (2000).
- [12] P. G. Bergmann. *Introduction to the theory of relativity* (Englewood Cliffs, 1960).
- [13] S. T. Thornton e J. B. Marion. *Classical Dynamics of particles and systems, 5th edition* (Thomson, 2004).
- [14] R. D’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity* (Oxford, 1992).
- [15] D. Lovelock e H. Rund. *Tensors, Differential Forms, and Variational Principles* (Dove Publications, 1989).
- [16] V. Fock. *The theory of space, time and gravitation, 2nd edition*. (The Macmillan Company, 1964).
- [17] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology, principles and applications of the general theory of relativity* (John Wiley & Sons, 1972).
- [18] T. Padmanabhan. *Gravitation, Foundations and Frontiers* (Cambridge University Press, 2010).
- [19] G. F. R. Ellis et al.. *Relativistic Cosmology* (Cambridge University Press, 2012).
- [20] L. D. Landau e E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields* (Butterworth–Heinemann, 1975).
- [21] W. Rindler. *Relativity Special, General and Cosmological. 2nd edition* (Oxford University Press, 2006).
- [22] A. Liddle e J. Loveday. *The Oxford Companion to Cosmology* (Oxford University Press, 2008).
- [23] J. F. Hawley e K. A. Holcomb. *Foundations of Modern Cosmology, 2nd edition* (Oxford University Press, 2005).
- [24] M. Ross. *Introduction to Cosmology. 3rd edition* (John Wiley & Sons, 2003).
- [25] V. Gorini e U. Moschella. *Modern Cosmology* (Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, 2002).

-
- [26] M. Berry. *Principles of cosmology and gravitation* (Syndics of the Cambridge Universty Press, 1976).
- [27] J. A. Peacock. *Cosmological Physics* (Cambridge University Press, 1999).
- [28] R. C. de Souza. *Modelos Cosmológicos pela Simetria de Noether*. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Paraná (2009).
- [29] J. B. Binder. *Modelos cosmológicos com campo escalar não-minimamente acoplado e interações no setor escuro*. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Paraná (2005).
- [30] J. F. G. dos Santos. Radiação Cósmica de Fundo. INAPE (2011). URL <http://www.inape.org.br/>.
- [31] A. A. Penzias e R. W. Wilson. A mesuarement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s. *Astrophysics Journal* **142**, 419 (1965).
- [32] A. Guth. Inflationary Universe. *Physical Review D* **23**, 347 (1981).
- [33] A. Guth. Inflation. *Carnegie Observatories Astrophysics Series* **2** (2004).
- [34] M. Novello e Érico Goulart. *Eletrodinâmica Não Linear, Causalidade e Efeitos Cosmológicos* (Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2010).
- [35] V. Faraoni. Correspondence between a scalar field and a effective perfect fluid. *Physical Review D* **85**, 024040 (2012).
- [36] F. Bauer. Filtering out the cosmological constant in the Palatini formalism of modified gravity. *General Relativity and Gravitation* **43**, 1733–1757 (2011).
- [37] T. P. Sotiriou e V. Faraoni. $f(R)$ theories of gravity. *Reviews of Modern Physics* **82**, 451–497 (2010).
- [38] T. B. R. F. Oliveira. *Teorias $f(R)$ de gravidade na formulação de Palatini*. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2010).
- [39] G. M. Kremer e D. S. M. Alves. Palatini approach to $1/R$ gravity and its implications to the late Universe. *Physical Review D* **70**, 023503 (2004).
- [40] F. Bauer e D. A. Demir. Inflation with Non-Minimal Coupling: Metric vc. Palatini Formulations. *Physical Letters B* **665**, 222–226 (2008).

-
- [41] G. J. Olmo. Cosmology in Palatini theories of gravity. *AIP Conference Proceedings* **1458**, 222–237 (2011).
- [42] J. B. Binder e G. M. Kremer. Model for a Universe described by a non-minimally coupled scalar field and interacting dark matter. *General Relativity and Gravitation* **38**, 857–870 (2006).
- [43] T. Harko, T. S. Koivisto e F. S. N. Lobo. Palatini formulation of modified gravity with a nonminimal curvature-matter coupling. *Modern Physics Letters A* **26**, 1467–1480 (2011).
- [44] N. Tamanini. Variational approach to gravitational theories with two independent connections. *General Relativity and Gravitation* (2012).
- [45] J. B. Binder e G. M. Kremer. A model for a non-minimally coupled scalar field interacting with dark matter. *Brazilian Journal of Physics* **35 no.4b**, 1038–1040 (2005).
- [46] Y. Kucukakca e U. Camci. Noether gauge symmetry for $F(R)$ gravity in Palatini formalism. arXiv:1111.5336v1 (2011).
- [47] A. Borowiec, A. K. M. Kamionka e M. Szydlowski. Cosmic acceleration from modified gravity with Palatini formalism. *General Relativity and Gravitation* página 32 (2012).
- [48] S. Capriotti. Differential geometry, Palatini gravity and reduction. arXiv:1209.3596 **12-21** (2012).
- [49] R. Courant e D. Hilbert. *Methods of mathematical physics* (Interscience publishers, 2008).
- [50] H. Fleming. Noether’s Theorem in Classical Field Theories and Gravitation. *Revista Brasileira de Ensino de Física* **17**, 236–252 (1987).
- [51] R. C. de Souza e G. M. Kremer. Constraining non-minimally coupled tachyon fields by Noether symmetry. *Classical and Quantum Gravity* **26**, 135008 (2009).
- [52] R. C. de Souza e G. M. Kremer. The dark sector from interacting canonical and non-canonical scalar fields. *Classical and Quantum Gravity* **27**, 175006 (2010).
- [53] R. C. de Souza e G. M. Kremer. Cosmic expansion from boson and fermion fields. *Classical and Quantum Gravity* **28**, 125006 (2011).
- [54] R. C. de Souza. *Modelos Cosmológicos para o Universo atual e primordial*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná (2012).

-
- [55] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products, 7th edition* (Academic Press, 2007).
- [56] S. Capozziello et al.. Constraining scalar-tensor quintessence by cosmic clocks. *Astronomy & Astrophysics* **472**, 51–62 (2007).
- [57] S. Capozziello e R. de Ritis. Noether’s symmetries and exact solutions in flat non-minimally coupled cosmological models. *Classical and Quantum Gravity* **11**, 107–117 (1994).
- [58] K. Jacobs. Spatially Homogeneous and Euclidean Cosmological Models with Shear. *Astrophysical Journal* **153**, 661 (1968).

Apêndice A

Equação de Euler-Lagrange para Lagrangiana dependente de derivadas de segunda ordem

Para o caso mais geral consideramos uma Lagrangiana que é função de q e de suas derivadas de até n -ésima ordem

$$S = \int dt \mathcal{L} \left(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(n)} \right) dt. \quad (\text{A.1})$$

Variando a ação acima temos

$$\delta S = \int dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}} \delta \ddot{q} + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{(n)}} \delta q^{(n)} \right]. \quad (\text{A.2})$$

Para integramos por partes o termo de derivada n -ésima, realizamos as seguintes mudanças de variável

$$u = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{(n)}}, \quad du = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{(n)}} \right) dt, \quad (\text{A.3})$$

$$dv = \delta q^{(n)} dt, \quad v = \delta q^{(n-1)}. \quad (\text{A.4})$$

Assim sendo, temos

$$\int dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{(n)}} \delta q^{(n)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{(n)}} \delta q^{(n-1)} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int \delta q^{(n-1)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{(n)}} \right) dt. \quad (\text{A.5})$$

O primeiro termo da expressão acima se anula, visto que q é fixo nos extremos. Agora, vamos realizar uma integração por partes n vezes deste resultado. Desta maneira, podemos reescrever (A.5) como

$$\int dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{(n)}} \delta q^{(n)} = (-1)^n \int \frac{d^{(n)}}{dt^{(n)}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{(n)}} \right) \delta q dt \quad (\text{A.6})$$

Usando este resultado para todos os valores de n possíveis e substituindo em (A.2), obtemos

$$\delta S = \int dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}} \right) - \dots + (-1)^n \frac{d^{(n)}}{dt^{(n)}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{(n)}} \right) \right] = 0, \quad (\text{A.7})$$

lembrando que n é um número inteiro.

Segundo o princípio da mínima ação, $\delta S = 0$. Desta maneira, encontramos a equação de Euler-Lagrange generalizada para derivadas de ordem n

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}} \right) - \dots + (-1)^n \frac{d^{(n)}}{dt^{(n)}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{(n)}} \right) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Para $n = 2$ temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}} \right) = 0, \quad (\text{A.9})$$

a equação de Euler-Lagrange para derivadas de segunda ordem. Sua forma tensorial é apresentada logo abaixo como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] + \nabla_\mu \nabla^\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \nabla^\nu \phi)} \right] = 0. \quad (\text{A.10})$$

Apêndice B

Redução da ordem das derivadas da Lagrangiana pontual: integração por partes em \ddot{a}

No capítulo 5, seção 5.4, apresentamos a ação do modelo para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (5.36) e a partir deste resultado encontramos a Lagrangiana pontual (5.37). Realizando uma integração por partes em \ddot{a} da equação (5.37), obtemos

$$\mathcal{L} = 6Fa\dot{a}^2 - 3a^2\dot{a}F'\dot{\phi} - a^3 \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V - \frac{3}{2F}F'^2\dot{\phi}^2 + 3F'\ddot{\phi} + 3F''\dot{\phi}^2 \right) + \rho_m^0. \quad (\text{B.1})$$

Aplicando este resultado na equação de Euler-Lagrange generalizada para derivadas de segunda ordem e escrita na métrica de Friedmann-Robertson-Walker

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{\phi}} \right) = 0, \quad (\text{B.2})$$

determinamos a equação de Klein-Gordon para o campo escalar

$$\left(1 - \frac{3F'^2}{F} \right) \ddot{\phi} + 3H \left(1 - \frac{3F'^2}{F} \right) \dot{\phi} + 3 \left(\frac{F'^3}{2F^2} - \frac{F'F''}{F} \right) \dot{\phi}^2 - RF' + V' = 0. \quad (\text{B.3})$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange para a na Lagrangiana pontual (B.1)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = 0, \quad (\text{B.4})$$

encontramos a seguinte expressão

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{12F} \left[6H^2 F + 12HF' \dot{\phi} + 3 \left(\frac{1}{2} \dot{\phi} - V - \frac{3}{2F} F'^2 \dot{\phi}^2 - 2F' \ddot{\phi} - 2F'' \dot{\phi}^2 \right) \right]. \quad (\text{B.5})$$

Lembrando que obtivemos $\rho = 6FH^2$ para a componente temporal (5.15) da equação de Einstein generalizada (4.55) e identificando a expressão para a pressão do campo escalar (5.11) na equação acima, reescrevemos a equação da aceleração (B.5) como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{12F} (\rho + 3p). \quad (\text{B.6})$$

Resultado que concorda com o obtido anteriormente via equação de Einstein (5.22).